

Programme de colles

du 9 au 13/3/2026

- Cette semaine : 1 question de cours dans la liste. Cette semaine, uniquement des questions de cours en probabilités.

1 [MATHS] POLYNÔMES.



Pour les élèves : il est très (très très, même) fortement conseillé de revoir le chapitre sur les complexes par la même occasion, en accentuant vos révisions sur la résolution d'équations (second degré, $z^n = \alpha$, ...)

! Attention

- Les polynômes sont vus comme des fonctions polynomiales en BCPST.
- En arithmétique : rien du tout à part le symbole de divisibilité (je n'ai même pas donné de propriétés).
- Les notions de polynôme irréductible, scindé, la décomposition dans $\mathbb{R}[X]$ sont hors-programme. Les relations coefficients/racines sont au programme uniquement pour le degré 2.
- La caractérisation de la multiplicité exacte avec le polynôme dérivé est hors-programme : seul le résultat « λ est une racine multiple de P si, et seulement si, $P(\lambda) = P'(\lambda) = 0$ » l'est.
- **Définition de $\mathbb{K}[X]$.** Définition, degré, coefficient dominant, cas du polynôme nul, opérations (somme, produit, multiplication par un réel/ complexe, composition). Propriétés du degré, ensembles $\mathbb{K}_n[X]$ et $\mathbb{K}_{\leq n}[X]$. Équation-produit sur $\mathbb{K}[X]$ (intégrité de $\mathbb{K}[X]$). ➤ Représentation d'un polynôme par une liste : fonction degré, évaluation (méthode naïve), dérivation, multiplication par X .
- **Polynôme dérivé.** Définition de la dérivée première, dérivées successives. Propriétés de la dérivation (immédiates pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, admises pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Degré et dérivation. Unicité des coefficients d'un polynôme.
- **Racines.** Divisibilité d'un polynôme par un autre. Définition d'une racine. Tout polynôme de degré impair possède une racine réelle. Racines multiples : définition et lien avec le polynôme dérivé. Comptage de racines.

- **Factorisation.** Allure de la factorisation dans $\mathbb{C}[X]$, exemples de recherche de racines. Retour sur la résolution de $z^n = \alpha$ avec $\alpha \neq 0$. Relations coefficients / racines pour le degré 2.

QUESTIONS & EXEMPLES IMPORTANTS DE COURS

- Définir ce qu'est un polynôme, expliquer comment les représenter en Python. Écrire deux fonctions :
 - `degre` qui étant donné un polynôme P renvoie son degré,
 - `eval` (méthode naïve avec symbole **) qui étant donnés P et x renvoie $P(x)$.
- Définir le polynôme dérivé une fois, puis k fois, puis donner sans justification une formule pour $[(X - a)^n]^{(k)}$.
- Réciter et compléter : « Si P possède strictement plus de racines que ..., alors ... ». Application : soit $n \geq 0$ un entier, $C \in \mathbb{R}$ et $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que :

$$\forall k \in [0, n], \quad P^{(k)}(C) = 0.$$
 Montrer que $P = 0$.
- Soit $\lambda \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{C}[X]$. Définir « λ est racine de P de multiplicité k », et « λ est une racine multiple de P ». Reformuler la seconde à l'aide du polynôme dérivé.
- Définir $P \mid Q$ pour deux polynômes P, Q . Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad X^2 \mid (X+1)^n - nX - 1.$$

Rappel pour les élèves : vous avez deux méthodes au choix. L'une des méthodes consiste à écrire $(X+1)^n - nX - 1$ sous la forme $X^2 Q$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$ en utilisant la formule du binôme. L'autre se situe dans un autre exemple où l'on montre que 0 est racine de multiplicité au moins deux à l'aide de la dérivée.
- Soient A, B deux événements. Définir « A indépendant de B » ($A \perp\!\!\!\perp B$). Montrer que si $A \perp\!\!\!\perp A$, alors $\mathbb{P}(A) = 0$ ou 1.
- Soient A, B deux événements. Définir « A indépendant de B » ($A \perp\!\!\!\perp B$), et « A, B incompatibles ». Préciser laquelle des deux hypothèses sert pour calculer $\mathbb{P}(A \cup B)$ d'une part, et $\mathbb{P}(A \cap B)$ d'autre part. (Conseil aux élèves : question de cours à méditer pendant plusieurs heures 😊)
- Définition d'un système complet d'événements fini $(A_i)_{i=1}^n$, citer la formule des probabilités totales.
- Citer la formule des probabilités composées. La prouver dans le cas $n = 3$. (Note aux élèves et colleurs : on ne se préoccupe pas de l'hypothèse dans la démonstration, c'est-à-dire de la bonne définition des probabilités conditionnelles.)
- Citer la formule de BAYES, puis la démontrer.

À venir : les probabilités, puis les limites.