

Devoir surveillé n°5

samedi 07/03/2026

Durée : 3 h

Consignes

- La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Les abréviations, sigles ou phrases nominales sont à proscrire.
- La numérotation des exercices (et des questions) doit être respectée et mise en évidence. Les résultats doivent être encadrés proprement.
- Il est important de numéroter correctement les pages des copies qui seront données à la correction. Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page.
- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il convient de le signaler sur la copie et de poursuivre la composition en expliquant les raisons des initiatives qui ont été prises.
- Les candidats ne doivent avoir aucune communication entre eux ou avec l'extérieur durant l'épreuve. Aussi, l'utilisation des téléphones portables et, plus largement, de tout appareil permettant des échanges ou la consultation d'informations, est interdite.
- **Les téléphones sont éteints rangés dans les sacs mis à l'avant ou à l'arrière de la salle. Les trousseaux sont interdites. Les copies sont fournies, ainsi que les brouillons.**
- **L'usage de la calculatrice est interdit.**
- À l'issue de la durée prévue pour cette épreuve, les candidats doivent déposer le stylo et ne sont plus autorisés à écrire quoi que ce soit sur leur copie. Tout retard donne lieu à une pénalité sur la note finale.
- La numérotation des exercices (et des questions) doit être respectée et mise en évidence. Les résultats doivent être encadrés proprement, soulignés ou bien surlignés.
- **Le crayon à papier ne sera pas corrigé.**
- **Les abus suivants entraînent la note de $\boxed{0/4}$ en rédaction :**
 - ◇ variables non quantifiées (*utiliser les symboles \forall, \exists , etc. appropriés.*)
 - ◇ confusion entre égalité = et équivalence \iff ,
 - ◇ « la fonction $f(x)$ »,
 - ◇ un excès de phrases sans sens.

Exercice 1 | Questions de cours Agro-Véto

1. Donner la définition de $u_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \ell$
2. Énoncer la définition et le théorème des suites adjacentes
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, et $k \in \mathbb{N}$, que vaut la dérivée k -ième du polynôme X^n ?
4. Qu'appelle-t-on ordre de multiplicité d'une racine d'un polynôme non nul ?

Exercice 2 | [Solution] Soit $m \in \mathbb{R}$. On considère le système d'inconnues $x, y, z \in \mathbb{R}$ donné par :

$$(S_m) : \begin{cases} x + y + mz = 0 \\ x + my + z = 0 \\ mx + y + z = 0 \end{cases}$$

1. Résoudre le système (S_0) .
2. Résoudre le système (S_m) en fonction de m .

Exercice 3 | [Solution] Soit $P = X^5 + X^4 - X - 1$.

1. Déterminer deux racines évidentes de P et préciser si elles sont simples ou multiples.
2. Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $P(x) = 0$.


Exercice 4 | [Solution] Une urne contient 15 boules numérotées de 1 à 15. Les boules numérotées de 1 à 5 sont blanches, les boules numérotées de 6 à 15 sont noires.

On rappelle que la justification de la quantité de dénombrement choisie compte autant que le résultat lui-même.

1. On tire simultanément cinq boules de l'urne.
 - 1.1) Combien y a-t-il de tirages au total ?
 - 1.2) Combien de tirages donnent 2 boules blanches et 3 boules noires ?
2. On tire successivement 5 boules de l'urne sans remise.
 - 2.1) Combien y a-t-il de tirages possibles ?
 - 2.2) Combien de tirages donnent 2 boules blanches et 3 boules noires dans cet ordre ?
 - 2.3) Combien de tirages donnent 2 boules blanches et 3 boules noires dans un ordre quelconque ?

Exercice 5 | [Solution] On considère la suite réelle (u_n) définie par :

$$u_0 = 1, \quad \text{et : } \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n + 1 + \frac{1}{(n+1)u_n}.$$

1. Calculer u_1 et u_2 .
2. **2.1)** Montrer que, pour tout entier naturel n :
« Le réel u_n est bien défini, et : $u_n \geq n + 1$ ».
- 2.2) En déduire la limite éventuelle de (u_n) .
3. Étudier la monotonie de la suite (u_n) .
4.  Écrire en langage Python une fonction `suite(n)` prenant pour argument un entier naturel n et renvoyant la liste formée par les termes de la suite (u_n) de u_0 jusqu'à u_n .
5. On se propose de déterminer un équivalent de la suite (u_n) .
 - 5.1) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = u_0 + n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)u_k}$.
 - 5.2) Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$.
 - 5.3) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \leq n + 3 - \frac{1}{n}$.
 - 5.4) Montrer enfin que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad n + 1 \leq u_n \leq n + 3$.
 - 5.5) Conclure que : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$.
6. Dans cette question, on s'intéresse à « l'erreur commise en remplaçant u_n par son équivalent n », c'est-à-dire on étudie la suite (ε_n) définie par :
 $\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varepsilon_n = u_n - n$.
 - 6.1) Étudier la monotonie de la suite (ε_n) .
 - 6.2) En déduire que (ε_n) est convergente et déterminer un encadrement, formé par deux entiers, de sa limite ℓ .
7. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $v_n = \varepsilon_n - \ell$.
 - 7.1) Déterminer : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ et en déduire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{2v_n} - 1}{\tan(3v_n)}$.
 - 7.2) Déterminer la monotonie de la suite (v_n) .
 - 7.3) Considérons la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k v_k$.
 - a) Montrer que les suites $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont adjacentes.
 - b) En déduire que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente (*on ne cherchera pas à déterminer sa limite*).

Exercice 6 | [Solution] Pour tout $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq 2$, on note f_n la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^n - nx + 1.$$

1. Soit $n \geq 2$. Montrer que la fonction polynomiale f_n admet une unique racine sur $[0, 1]$, notée x_n .
2. Calculer x_2 .
3. **3.1)** Soit $n \geq 2$. Montrer que $f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq 0$ pour $x \in [0, 1]$. En déduire le signe de $f_{n+1}(x_n)$.
- 3.2) Étudier alors la monotonie de la suite $(x_n)_{n \geq 2}$.
4. En déduire que la suite $(x_n)_{n \geq 2}$ converge vers zéro, puis que : $x_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

Fin du sujet

Correction

Devoir surveillé n° 5

samedi 07/03/2026

Solution (exercice 2) [Énoncé]

1. Lorsque $m = 0$, on a :

$$(S_0) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ x + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ -y + z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ y + z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ -y + z = 0 \\ 2z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x = y = z = 0.$$

On obtient alors : $\mathcal{S} = \{(0, 0, 0)\}$

2. Lorsque $m \in \mathbb{R}$, on a

$$(S_m) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + mz = 0 \\ x + my + z = 0 \\ mx + y + z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + mz = 0 \\ (m-1)y + (1-m)z = 0 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ (1-m)y + (1-m^2)z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 - mL_1 \end{cases}$$

On peut alors commencer à distinguer les cas.

- Si $m = 1$, les deux dernières lignes sont nulles et le système est équivalent à : $x + y + z = 0$.

L'ensemble des solutions est $\mathcal{S} = \{(-y - z, y, z) \mid (y, z) \in \mathbb{R}^2\}$.

- Si $m \neq 1$, on peut multiplier la deuxième et la troisième ligne par $\frac{1}{m-1}$ pour

obtenir :

$$(S_m) \Leftrightarrow \begin{cases} x + y + mz = 0 \\ y - z = 0 & L_2 \leftarrow \frac{1}{m-1}L_2 \\ -y - (m+1)z = 0 & L_3 \leftarrow \frac{1}{m-1}L_3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + y + mz = 0 \\ y - z = 0 \\ -(m+2)z = 0 & L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \end{cases}$$

- ◇ Si $m = -2$, le système est équivalent à $\begin{cases} x + y - 2z = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$ dont l'ensemble

des solutions est $\{(z, z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

- ◇ Si $m \neq -2$ (et toujours $m \neq 1$), le système est équivalent à

$$\begin{cases} x + y + mz = 0 \\ y - z = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

dont l'unique solution est $(0, 0, 0)$.

Solution (exercice 3) [Énoncé]

1. On constate que $P(1) = P(-1) = 0$. Or, $P' = 5X^4 + 4X^3 - 1$, et $P'(1) = 8 \neq 0$, $P'(-1) = 0$. Donc 1 est racine simple et -1 est racine multiple.
2. On a donc l'existence d'un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = (X+1)^2(X-1)Q$ et $\deg Q = 2$. Donc il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ de sorte que $Q = aX^2 + bX + c$. De plus,

$$P = (X+1)^2(X-1)(aX^2 + bX + c)$$

$$\Leftrightarrow P = (X^2 + 2X + 1)(aX^3 + (b-a)X^2 + (c-b)X - c)$$

$$\Leftrightarrow P = aX^5 + (a+b)X^4 + (b+c-a)X^3 + (c-a-b)X^2 - (b+c)X - c$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ a + b = 1 \\ b + c - a = 0 \\ c - a - b = 0 \\ -(b+c) = -1 \\ -c = -1 \end{cases} \Leftrightarrow a = 1, \quad b = 0, \quad c = 1.$$

Ainsi, $P = (X+1)^2(X-1)(X^2+1)$. Comme $X^2+1 = (X-i)(X+i)$, le polynôme X^2+1 n'a pas de racine réelle. Ainsi, $\mathcal{S} = \{-1, 1\}$.

Solution (exercice 4) [Énoncé]

1. 1.1) Puisque les tirages ont lieu simultanément, cela revient à choisir sans

ordre 5 objets distincts dans un ensemble à 15 objets. Il y a donc $\binom{15}{5}$

tirages possibles.

1.2) On procède par protocole.

- On commence par choisir les boules blanches, il y'a $\binom{5}{2}$ choix car on les choisit à nouveau sans ordre (simultanément),
- puis on choisit de la même façon les trois boules noires parmi les 10, il y'a $\binom{10}{3}$ façons.

Au total : $\binom{5}{2} \times \binom{10}{3}$ choix.

2. Dans cette question, les tirages ont lieu successivement, on choisira donc des quantités de dénombrement avec ordre.

2.1) On choisit successivement et sans remise cinq boules parmi 15. Un tirage est une 5-liste sans répétition de l'ensemble des 15 boules.

Il y en a au total $A_{15}^5 = 15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11$.

2.2) On raisonne par protocole.

- On commence par choisir les deux boules blanches dans un ensemble à 5 boules blanches, avec ordre et sans répétition. On a donc A_5^2 choix.
- Puis, on choisit les trois boules noires dans un ensemble à 10 boules noires, avec ordre et sans répétition. On a donc A_{10}^3 choix.

Au total, $A_5^2 \times A_{10}^3 = 5 \times 4 \times 10 \times 9 \times 8$.

2.3) On raisonne là encore par protocole.

- On choisit à présent les deux boules blanches au départ sans ordre. On a donc $\binom{5}{2}$ choix.
- On choisit de-même les boules noires $\binom{10}{3}$ choix.
- On forme ensuite tous les tirages possibles. Comme chaque boule est distincte, il y'en a autant que de permutations d'un ensemble à 5 éléments, soit $5!$ choix.

Au total, il y a $5! \times \binom{5}{2} \times \binom{10}{3} = 120 \times 10 \times 120 = 144000$ tirages.

Solution (exercice 5) [Énoncé]

1. La relation de récurrence donne :

$$\begin{cases} u_1 = u_0 + 1 + \frac{1}{u_0} = 1 + 1 + 1 = \boxed{3}, \\ u_2 = u_1 + 1 + \frac{1}{2u_1} = 3 + 1 + \frac{1}{6} = 4 + \frac{1}{6} = \boxed{\frac{25}{6}}. \end{cases}$$

2. 2.1) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « Le réel u_n est bien défini, et $u_n \geq n + 1$ ».

Initialisation. $u_0 = 1$ donc u_0 est bien défini et on a bien $u_0 \geq 0 + 1$. Ainsi, $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Hérédité. Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie de sorte que u_n soit bien défini avec $u_n \geq n + 1$. Alors, $u_n \neq 0$ et la quantité $\frac{1}{(n+1)u_n}$ est correctement définie, de sorte que u_{n+1} soit bien défini. De plus, $\frac{1}{(n+1)u_n} \geq 0$ (en tant que quotient de quantités strictement positives) donc $u_{n+1} \geq 1 + u_n$ soit, par hypothèse de récurrence, $u_{n+1} \geq n + 2$.

On en déduit que $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie, d'où le résultat par le principe de récurrence.

2.2) Soit $n \in \mathbb{N}$, ayant $u_n \geq n + 1$ avec $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n + 1) = +\infty$, par comparaison, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$. Ainsi, $\boxed{\text{la suite } (u_n) \text{ est divergente vers } +\infty}$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $u_{n+1} - u_n = 1 + \frac{1}{(n+1)u_n} \geq 1 > 0$.

Donc : $\boxed{(u_n) \text{ est strictement croissante}}$.

4. **def** suite(n) :

```
u = 1
L = [1]
for i in range(1, n+1):
    u = u + 1 + 1/(i*u)
    L.append(u)
return L
```

```
>>> suite(2)
[1, 3.0, 4.166666666666667]
>>> 25/6
4.166666666666667
```

5. 5.1) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, $u_{k+1} - u_k = 1 + \frac{1}{(k+1)u_k}$. En sommant ces inégalités pour k allant de 0 à $n - 1$ (où $n \in \mathbb{N}^*$) :

$$\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{(k+1)u_k} \right).$$

D'une part, $\sum_{k=0}^{n-1} (u_{k+1} - u_k) = u_n - u_0$ (somme télescopique) .

D'autre part, $\sum_{k=0}^{n-1} \left(1 + \frac{1}{(k+1)u_k} \right) = n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)u_k}$.

On obtient ainsi : $u_n - u_0 = n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)u_k}$.

D'où le résultat attendu : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n = u_0 + n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)u_k}}$.

5.2) Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k(k+1)}$.

Or, $k(k+1) \leq (k+1)^2$ donc $\frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{1}{k(k+1)}$ et on obtient bien :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

5.3) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. On sait que $u_k \geq k+1$, donc $(k+1)u_k \geq (k+1)^2$, puis

$$\frac{1}{(k+1)u_k} \leq \frac{1}{(k+1)^2} \leq \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}.$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} u_n &= u_0 + n + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(k+1)u_k} \\ &= u_0 + n + \frac{1}{u_0} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{(k+1)u_k} \\ &\leq n+2 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right), \end{aligned}$$

avec $\sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = 1 - \frac{1}{n}$ (somme télescopique).

On obtient bien : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \leq n+3 - \frac{1}{n}$.

5.4) $\forall n \in \mathbb{N}, n+1 \leq u_n \leq n+3$. Vrai pour $n=0$, et aussi pour tout $n \geq 1$ d'après les questions **1)** et **6.3)**.

5.5) $\forall n \geq 1, \frac{n+1}{n} \leq \frac{u_n}{n} \leq \frac{n+3}{n}$, donc $1 + \frac{1}{n} \leq \frac{u_n}{n} \leq 1 + \frac{3}{n}$. Or, $(1 + \frac{1}{n})_{n \geq 1}$ et $(1 + \frac{3}{n})_{n \geq 1}$ convergent vers 1.

Donc d'après le théorème d'encadrement : $(\frac{u_n}{n})_{n \geq 1}$ converge vers 1,

soit : $u_n \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} n$.

6. 6.1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\begin{aligned} \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n &= (u_{n+1} - n - 1) - (u_n - n) \\ &= u_{n+1} - u_n - 1 \\ &= 1 + \frac{1}{(n+1)u_n} - 1 \\ &= \frac{1}{(n+1)u_n} \\ &> 0. \end{aligned}$$

La suite (ε_n) est strictement croissante.

6.2) D'après **6.4)** : $\forall n \in \mathbb{N}, n+1 \leq u_n \leq n+3$, donc : $\forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq \varepsilon_n \leq 3$.

La suite (ε_n) est croissante et majorée, donc par le théorème de la limite monotone, (ε_n) converge vers un réel ℓ .

Par passage à la limite dans l'inégalité précédente, on obtient :

$$1 \leq \ell \leq 3.$$

7. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \varepsilon_n - \ell$.

7.1) Par somme de limites : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ell - \ell = 0$.

Ainsi, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2v_n = 0$ donc $e^{2v_n} - 1 \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 2v_n$.

De même, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3v_n = 0$ donc $\tan(3v_n) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} 3v_n$.

On en déduit, par quotient d'équivalents : $\frac{e^{2v_n} - 1}{\tan(3v_n)} \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{2}{3}$.

D'où : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{2v_n} - 1}{\tan(3v_n)} = \frac{2}{3}$.

7.2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} - v_n = \varepsilon_{n+1} - \ell - (\varepsilon_n - \ell) = \varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n > 0,$$

donc (v_n) est strictement croissante.

7.3) Considérons la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k v_k.$$

a) Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = S_{2n}$ et $V_n = S_{2n+1}$. Montrons que les suites (U_n) et (V_n) sont adjacentes.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} U_{n+1} - U_n &= S_{2(n+1)} - S_{2n} \\ &= S_{2n+2} - S_{2n} \\ &= (-1)^{2n+2} v_{2n+2} + (-1)^{2n+1} v_{2n+1} \\ &= v_{2n+2} - v_{2n+1}. \end{aligned}$$

Or, la suite (v_n) est croissante donc $v_{2n+2} \geq v_{2n+1}$.

Ainsi, $U_{n+1} - U_n \geq 0$ et la suite (U_n) est croissante. En outre,

$$\begin{aligned} V_{n+1} - V_n &= S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1} \\ &= S_{2n+3} - S_{2n+1} \\ &= (-1)^{2n+3} v_{2n+3} + (-1)^{2n+2} v_{2n+2} \\ &= v_{2n+2} - v_{2n+3}. \end{aligned}$$

Or, la suite (v_n) est croissante donc $v_{2n+2} \leq v_{2n+3}$.

Ainsi, $V_{n+1} - V_n \leq 0$ et la suite (V_n) est décroissante.

Enfin, on a :

$$V_n - U_n = S_{2n+1} - S_{2n} = (-1)^{2n+1} v_{2n+1} = -v_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Toutes les hypothèses sont vérifiées :

Les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes

b) Par le théorème des suites adjacentes, les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) convergent vers une même limite, notée S_∞ .

Ainsi, les suites extraites de rang pair et de rang impair de la suite

(S_n) convergent vers S_∞ .

Cela implique que $\boxed{\text{la suite } (S_n) \text{ est convergente de limite } S_\infty}$.

Solution (exercice 6) [Énoncé]

1. Soit $n \geq 2$. La fonction f_n est dérivable par somme de telles fonctions, de plus $f'_n(x) = nx^{n-1} - n = n(x^{n-1} - 1)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Si $x \in [0, 1]$, alors $x^{n-1} - 1 < 0$ sauf pour $x = 1$ où $f'_n(1) = 0$. Donc f_n est strictement décroissante sur $[0, 1]$. Elle est de plus continue car polynomiale, donc d'après le théorème de la bijection, elle réalise une bijection de $[0, 1]$ vers $[f_n(1), f_n(0)] = [2-n, 1] \ni 0$ puisque $n \geq 2$. Donc : $\boxed{\exists! x_n \in [0, 1], f_n(x_n) = 0}$.

2. $x_2 \in [0, 1]$ et est solution de $x^2 - 2x + 1 = 0 = (x-1)^2$, donc $\boxed{x_2 = 1}$.

3. 3.1) Soit $n \geq 2$ et $x \in [0, 1]$. Alors :

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) - f_n(x) &= (x^{n+1} - (n+1)x + 1) - (x^n - nx + 1) \\ &= x^{n+1} - x^n - x = x(x^{n-1}(x-1) - 1). \end{aligned}$$

Or, $x \in [0, 1]$, donc $x-1 \leq 0$ et $x^{n-1} \geq 0$, ainsi $x^{n-1}(x-1) \leq 0$, donc :

$$\boxed{\forall x \in [0, 1], f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq 0}.$$

Soit $n \geq 2$. En évaluant alors en $x = x_n$, on déduit $f_{n+1}(x_n) \leq 0$.

3.2) On a ainsi pour tout entier $n \geq 2$, que $f_{n+1}(x_n) \leq 0 = f_{n+1}(x_{n+1})$.

Puisque f_{n+1} est strictement décroissante, on alors $x_n \geq x_{n+1}$. Conclusion : $\boxed{(x_n) \text{ est décroissante}}$.

4. La suite est décroissante minorée par zéro. Donc d'après le théorème de la limite monotone, elle converge. De plus, par passage à la limite, $\ell \in [0, 1]$. Supposons par l'absurde que $\ell \in]0, 1]$. Rappelons que :

$$\forall n \geq 2, \quad x_n^n = nx_n - 1$$

d'après l'équation. Or, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^n = 0$. En effet $0 \leq x_n^n \leq x_3^n$ pour tout $n \geq 3$ par décroissance (attention, ne pas majorer par x_2^n puisque $x_2 = 1 \dots$). Or, $x_3 \in [0, 1[$ puisque $x_3 \neq 1$ ($1^3 - 3 + 1 \neq 0$). Donc par théorème d'encadrement,

$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^n = 0$. Par ailleurs $nx_n - 1 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty$ puisque $\ell > 0$ — **Contradiction**

Ainsi, $\boxed{x_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0}$.

Montrons à présent que : $\boxed{x_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n}}$. Puisque $nx_n = 1 + x_n^n$ pour $n \geq 2$ et que

$x_n^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$, on a $1 + x_n^n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$, donc $\lim_{n \rightarrow \infty} (nx_n) = 1$, cela prouve l'équivalent.