

# Programme de colles

## du 23 au 27/3/2026

- Cette semaine : 1 question de cours dans la liste.
- Note aux colleurs : essayez de consacrer la majeure partie du temps aux probabilités, qui est un chapitre difficile pour les élèves : un ou deux calculs de limites par équivalents (ou autre technique) au début, pas plus.
- Sur continuité/dérivabilité, uniquement des questions de cours pour le moment. Pas de question de cours en probabilités, uniquement des exercices.

### 1 [MATHS] COMPLÉMENTS SUR LES LIMITES



Ce chapitre vient compléter celui sur les limites de fonctions de début d'année. On privilégie les nouveautés : fonctions avec rupture d'expression en un point, utilisation de suite pour nier des limites, calculs de limites par équivalents etc.

**Attention** Les exercices « epsilonques » ne sont pas dans l'esprit du programme ; à garder plutôt pour la fin de la colle si le reste a été réussi.

- **Notion de limites.** Rappel sur : les définitions de la limite en un point du bord du domaine de définition, limite à droite et à gauche, opérations. Différents calculs de limites pour les fonctions définies par morceaux. Composition des limites. Caractérisation séquentielle, utilisation pour nier des limites. Croissances comparées.
- **Limites et inégalités.** Théorème d'encadrement, de majoration/minoration.
- **Équivalents.** Définition, propriétés et équivalents usuels (les mêmes que pour les suites).

### 2 [MATHS] ESPACES PROBABILISÉS



#### ! Attention

- En 1ère année : les univers sont finis, et les événements sont toutes les parties de l'univers.
- On peut néanmoins proposer des expériences d'univers non fini, du moment qu'aucune difficulté technique n'apparaît dans la résolution (séries, par exemple).

- **Introduction.** Probabilités ou Statistiques?
- **Axiomatique des probabilités.** Notion d'univers, d'événements, événements élémentaires. Espace probabilisable, espace probabilisé : définition d'une probabilité, propriétés. Contexte d'équiprobabilité, probabilité uniforme. Probabilité associée à une famille finie de réels positifs de somme 1. Système complet et quasi-complet d'événements.
- **Conditionnement & Indépendance d'événements.** Probabilité conditionnelle. Indépendance de deux événements, puis d'un nombre quelconque. Propriétés de l'indépendance.
- **Formules probabilistes.** Pour traiter un « OU aléatoire » : probabilités totales (pour un système complet d'événements ou au pire un système quasi-complet d'événements). Pour traiter des intersections d'événements non-indépendants : probabilités composées. Pour retourner un conditionnement : formule de BAYES. **Pour commencer, les élèves peuvent bien sûr s'aider d'un arbre en cas de besoin. Il faut néanmoins que la rédaction s'appuie ensuite sur l'une de ces formules.**

### QUESTIONS & EXEMPLES IMPORTANTS DE COURS

1. Soit  $x \in \mathbb{R}$ . Rappeler l'encadrement définissant  $[x]$ , le graphe de la partie entière, préciser la limite à droite et gauche en chaque entier.
2. Énoncer la caractérisation séquentielle de la limite. (Pour les élèves : attention aux quantificateurs!) Justifier que la fonction  $f : \begin{matrix} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sin(\frac{1}{x}) \end{matrix}$  n'admet pas de limite en  $0^+$ .
3. Citer le théorème d'encadrement (version classique et version valeur absolue), puis montrer que :  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(x) \sin(x)}{e^x} = 0$ .
4. Définir la notion de fonctions  $f, g$  équivalentes en un point  $x_0$ . Rappeler et établir l'équivalent usuel portant sur arctan.
5. Rappeler la définition de fonction continue en un point, et continue sur un intervalle. Étudier la continuité de  $h : x \mapsto \begin{cases} x^{\frac{1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

6. ➤\_🔗 Fonction Python résolvant de manière approchée l'équation  $f(x) = 0$  par dichotomie où  $f$  est une fonction continue changeant de signe sur  $[a, b]$ . Expliquer comment utiliser cette fonction pour calculer une valeur approchée de  $\sqrt{2}$  à une précision fixée.
7. Soit  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  une application continue. Alors montrer que  $f$  admet un *point fixe* c'est-à-dire qu'il existe  $c \in [0, 1]$  tel que  $f(c) = c$ .
8. Définition d'une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  (*pour les élèves, on médite plusieurs heures le panneau attention qui suit ladite définition ...*)  
*Application* : soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par  $f(x) = x^2 \ln(x)$ . Montrer que  $f$  se prolonge en zéro par continuité, et montrer que le prolongement est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^+$ .

*À venir : les espaces vectoriels.*