

# Programme de colles

## du 30 au 3/4/2026

- Cette semaine : 1 question de cours dans la liste.
- Sur les espaces vectoriels, uniquement des questions de cours cette semaine.

### 1 [MATHS] COMPLÉMENTS SUR LA CONTINUITÉ ET LA DÉRIVATION



- **Compléments sur la continuité.** Rappel sur : la continuité, à droite à gauche, opérations sur les fonctions continues, théorème de la bijection. Prolongement par continuité d'une fonction, fonctions continues.
- **Grands théorèmes de continuité.** Théorème des valeurs intermédiaires, algorithme de dichotomie pour résoudre  $f(x) = 0$  de manière approchée. Théorème des bornes atteintes, retour sur le théorème de la bijection.
- **Compléments sur la dérivation.** Rappel sur : la dérivabilité, à droite et à gauche, opérations sur les fonctions dérivables, tangente. Dérivées successives.
- **Grands théorèmes de dérivation.** Théorème de ROLLE, égalité des accroissements finis, preuve du résultat sur le signe de la dérivée et la monotonie.

#### Attention

L'inégalité des accroissements finis est hors-programme.

### + RÉVISIONS SUR LES SUITES IMPLICITES ET RÉCURRENTES $u_{n+1} = f(u_n)$

Pour les colleurs : merci d'aller au plus simple sur les suites choisies, l'essentiel du temps doit être passé sur la dichotomie et l'égalité des accroissements finis.

- **Révisions sur les suites implicites avec 1 question au moins demandant le  $n$ -ième terme de la suite selon l'algorithme de dichotomie.** (Pour les élèves : revoir a minima l'exemple de suite implicite présent à la fin du cours sur les suites, et bien sûr l'algorithme de dichotomie.)

- **Révisions sur les suites  $u_{n+1} = f(u_n)$  avec 1 question utilisant l'égalité des accroissements finis** (Pour les élèves : revoir a minima l'exemple présent à la fin du cours de compléments sur la continuité et la dérivation, appelé « étude d'une suite récurrente ».)

### QUESTIONS & EXEMPLES IMPORTANTS DE COURS

1. Définir  $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$  pour  $(x_1, \dots, x_n)$  une famille de  $n$  vecteurs d'un espace vectoriel  $E$ . On note  $u : x \mapsto \cos^2 x$ ,  $f : x \mapsto 1$ ,  $g : x \mapsto \cos(2x)$ . Montrer que  $u \in \text{Vect}(f, g)$ .
2. Soient  $x_1, x_2, y_1, y_2$  quatre vecteurs d'un espace vectoriel  $E$ . Expliquer comment montrer que  $\text{Vect}(x_1, x_2) = \text{Vect}(y_1, y_2)$ . (méthode à énoncer)  
[Application] Soit  $(x, y) \in E^2$ , montrer que :  $\text{Vect}(x, y) = \text{Vect}(x + y, x - y)$ .
3. Donner le résultat que l'on a sur l'intersection et la réunion d'espaces vectoriels. Établir que l'intersection de deux espaces vectoriels est un espace vectoriel.
4. >\_🔗 Fonction Python résolvant de manière approchée l'équation  $f(x) = 0$  par dichotomie où  $f$  est une fonction continue changeant de signe sur  $[a, b]$ . Expliquer comment utiliser cette fonction pour calculer une valeur approchée de  $\sqrt{2}$  à une précision fixée.
5. Soit  $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  une application continue. Alors montrer que  $f$  admet un point fixe c'est-à-dire qu'il existe  $c \in [0, 1]$  tel que  $f(c) = c$ .
6. Définition d'une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$  (pour les élèves, on médite plusieurs heures le panneau attention qui suit ladite définition...)  
Application : soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}_+^*$  par  $f(x) = x^2 \ln(x)$ . Montrer que  $f$  se prolonge en zéro par continuité, et montrer que le prolongement est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^+$ .
7. Citer le théorème de ROLLE et l'égalité des accroissements finis. Interpréter géométriquement sur deux dessins distincts.
8. Montrer à l'aide de l'égalité des accroissements finis (appliquée à  $t \mapsto \ln(1 + t)$  sur  $[0, x]$  pour tout  $x > 0$ ) que :  $\forall x > 0, \quad \frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$ .

À venir : les espaces vectoriels.