

Programme de colles

du 20 au 24/4/2026

- Cette semaine : 1 question de cours dans la liste.
- Sur les espaces vectoriels; pas encore de représentations matricielles cette semaine.

1 [MATHS] ESPACES VECTORIELS



! Attention

- Les notions de sommes (normale et directe) ne sont pas au programme de BCPST. De fait, les notions associées (projecteurs, symétries, etc.) ne le seront pas non plus.
- Les considérations de changement de corps de base ne sont pas vraiment dans l'esprit du programme.

- **Structure d'espace vectoriel.** Définition. Espaces-vectoriels usuels (uplets et géométrie, polynômes, matrices, suites et fonctions). Règles de calcul secondaires dérivant de la définition. Combinaisons linéaires d'une famille finie de vecteurs, d'une famille quelconque. Sous-espace vectoriel. Nombreux exemples avec des vecteurs de \mathbb{R}^n , des suites, des fonctions, des polynômes, et les solutions d'une EDL homogène d'ordre un ou deux. Intersection d'espaces vectoriels. L'espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs forme un sous-espace vectoriel, et c'est le plus petit sous-espace vectoriel contenant cette famille. Propriétés sur le Vect. Description des sous-espaces vectoriels de \mathbb{K}^n sous forme paramétrique ou cartésienne.
- **Familles de vecteurs** : libres, génératrices et espaces vectoriels de dimension finie, bases. Notion de coordonnée d'un vecteur dans une base, bases canoniques. Complétion de familles libres, extraction de familles génératrices.

- **Dimension d'un espace vectoriel et représentation matricielle.** Toutes les bases ont même nombre d'éléments (fait largement admis). Définition de la dimension. Notion de droite, plan et d'hyperplan (pour les espaces vectoriels de dimension finie uniquement). Familles de dim E vecteurs dans un espace vectoriel de dimension finie E. Dimension d'un sous-espace vectoriel.

2 [MATHS] COMPLÉMENTS SUR LA CONTINUITÉ ET LA DÉRIVATION



+ **RÉVISIONS SUR LES SUITES IMPLICITES ET RÉCURRENTES** $u_{n+1} = f(u_n)$ Pour les colleurs : merci d'aller au plus simple sur les suites choisies, l'essentiel du temps doit être passé sur la dichotomie et l'égalité des accroissements finis.

- **Révisions sur les suites implicites avec 1 question au moins demandant le n-ième terme de la suite selon l'algorithme de dichotomie.** (Pour les élèves : revoir à minima l'exemple de suite implicite présent à la fin du cours sur les suites, et bien sûr l'algorithme de dichotomie.)
- **Révisions sur les suites $u_{n+1} = f(u_n)$ avec 1 question utilisant l'égalité des accroissements finis** (Pour les élèves : revoir à minima l'exemple présent à la fin du cours de compléments sur la continuité et la dérivation, appelé « étude d'une suite récurrente ».)

QUESTIONS & EXEMPLES IMPORTANTS DE COURS

1. Définir $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ pour (x_1, \dots, x_n) une famille de n vecteurs d'un espace vectoriel E. On note $u : x \mapsto \cos^2 x$, $f : x \mapsto 1$, $g : x \mapsto \cos(2x)$. Montrer que $u \in \text{Vect}(f, g)$.
2. Soient x_1, x_2, y_1, y_2 quatre vecteurs d'un espace vectoriel E. Expliquer comment montrer que $\text{Vect}(x_1, x_2) = \text{Vect}(y_1, y_2)$. (méthode à énoncer)
[Application] Soit $(x, y) \in \mathbb{E}^2$, montrer que : $\text{Vect}(x, y) = \text{Vect}(x + y, x - y)$.
3. Donner le résultat que l'on a sur l'intersection et la réunion d'espaces vectoriels. Établir que l'intersection de deux espaces vectoriels est un espace vectoriel.
4. On note $F = \text{Vect}(X, Y) \subset \mathbb{R}^4$ où $X = (1, 2, 1, 1)$ et $Y = (0, 1, 1, 1)$. Déterminer un système d'équations cartésiennes définissant F.
5. On note $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{K}^4 \mid x + y + z + t = 0, x = y\} \subset \mathbb{R}^4$. Déterminer une forme paramétrique de G, i.e. une écriture en Vect.

6. Donner la définition d'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel. Montrer, en utilisant la définition, que l'ensemble

$$F = \left\{ f \in \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R}) \mid \int_0^1 f(t) dt = 0 \right\}$$

est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$.

7. Définir « (x_1, \dots, x_n) libre dans E » (*pour les élèves : attention aux quantificateurs!*) ainsi que le résultat sur les familles échelonnées (notion à définir aussi) de polynômes.
8. Définir « (x_1, \dots, x_n) génératrice de E » (*pour les élèves : on attend par exemple une écriture propre avec des quantificateurs, ou en terme de Vect*) puis « (x_1, \dots, x_n) est une base de E ». Définir ce que l'on appelle les coordonnées d'un vecteur dans cette base.
9. Qu'appelle-t-on dimension d'un espace vectoriel de dimension finie? (on précisera le cas $E = \{0_E\}$). Montrer que $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ est un hyperplan de \mathbb{R}^3 .
10. Qu'appelle-t-on dimension d'un espace vectoriel de dimension finie? Soit $n \geq 2$ et $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X] \mid P(0) = P(1) = 0\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$ de dimension $n - 1$.

À venir : les variables aléatoires.