

Devoir surveillé n°6

samedi 28/03/2026

Durée : 3 heures

Consignes

- La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Les abréviations, sigles ou phrases nominales sont à proscrire.
- La numérotation des exercices (et des questions) doit être respectée et mise en évidence. Les résultats doivent être encadrés proprement.
- Il est important de numéroter correctement les pages des copies qui seront données à la correction. Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page.
- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il convient de le signaler sur la copie et de poursuivre la composition en expliquant les raisons des initiatives qui ont été prises.
- Les candidats ne doivent avoir aucune communication entre eux ou avec l'extérieur durant l'épreuve. Aussi, l'utilisation des téléphones portables et, plus largement, de tout appareil permettant des échanges ou la consultation d'informations, est interdite.
- **Les téléphones sont éteints rangés dans les sacs mis à l'avant ou à l'arrière de la salle. Les trousseaux sont interdites. Les copies sont fournies, ainsi que les brouillons.**
-
- **L'usage de la calculatrice est interdit.**
- À l'issue de la durée prévue pour cette épreuve, les candidats doivent déposer le stylo et ne sont plus autorisés à écrire quoi que ce soit sur leur copie. Tout retard donne lieu à une pénalité sur la note finale.
- La numérotation des exercices (et des questions) doit être respectée et mise en évidence. Les résultats doivent être encadrés proprement, soulignés ou bien surlignés.
- **Le crayon à papier ne sera pas corrigé.**
- **Les abus suivants entraînent la note de $\boxed{0/4}$ en rédaction :**
 - ◇ variables non quantifiées (*utiliser les symboles \forall, \exists , etc. appropriés.*)
 - ◇ confusion entre égalité = et équivalence \iff ,
 - ◇ « la fonction $f(x)$ »,
 - ◇ un excès de phrases sans sens.

Exercice 1 | Questions de cours Agro-Véto

1. Donner la définition d'une famille finie d'événements mutuellement indépendants.
2. Énoncer la formule des probabilités totales.
3. Donner la définition d'une fonction prolongeable par continuité en un point a .
4. Donner la définition d'une fonction dérivable en un point a .

Exercice 2 | [Solution] Déterminer des équivalents simples des expressions ci-dessous, au point indiqué.

1. $\sin(e^{3x} - 1)$ en 0
2. $\left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)^x - 1$ en $+\infty$. On donnera un équivalent de la forme $\frac{K}{x^\alpha}$ avec $K, \alpha \in \mathbb{R}$ à préciser

Exercice 3 | [Solution] Soit $t \geq 0$, on considère alors : $P_t = X^3 + tX^2 + 1$.

1. Montrer que : $P_t\left(\frac{-2t}{3}\right) > 0$.
2. Démontrer que le polynôme P_t admet une unique racine réelle, que l'on notera $r(t)$, et vérifiant : $r(t) \leq -\frac{2t}{3}$.
3. Déterminer le signe de $P_t(-t-1)$.
4. $\gg \text{🔗}$
 - 4.1) Écrire une fonction $P(t, x)$ prenant en argument t , et un réel x , et renvoyant la valeur de $P_t(x)$.
 - 4.2) Écrire une fonction racine(t, n), prenant en argument t et un entier n , et renvoyant une valeur approchée de $r(t)$ à 10^{-n} près selon l'algorithme de dichotomie.

Exercice 4 | [Solution] On définit une fonction f par : $f(x) = \frac{\ln(1+x)}{e^{4x}-1}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f .
2. La fonction f est-elle prolongeable par continuité en 0?

Exercice 5 | [Solution] On rappelle que $\mathbb{R}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients réels. On note :

$$\forall P \in \mathbb{R}[X], f(P) = (2X+1)P + (1-X^2)P'$$

Par ailleurs, pour $P \in \mathbb{R}[X]$, $\deg P$ désigne le degré de P et $\text{dom } P$ son coefficient dominant.

- Déterminer $f(X^2), f(X^3)$.
- Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.
 - Supposons que $\deg P \geq 3$. Montrer que : $\deg f(P) = 1 + \deg P$, et préciser une relation qui relie $\deg f(P)$ à $\deg P$ et $\deg P$.
 - En déduire : $[f(P) = P] \implies [\deg P \leq 2]$.
- Déterminer les polynômes P à coefficients réels vérifiant : $f(P) = P$.

Problème 1 | [Solution]

PARTIE I — CALCUL DES PUISSANCES D'UNE MATRICES

On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_{3,3}(\mathbb{R})$ et $J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, J^n = 3^{n-1}J$.
- Calculer : $R = \frac{1}{2}(J - I)$.
- On note $a_0 = 0, b_0 = 1$. Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}, \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2, R^n = \frac{a_n J + b_n I}{2^n} \text{ et : } \begin{cases} a_n = 2a_{n-1} + b_{n-1} \\ b_n = -b_{n-1}. \end{cases}$$
- Déterminer a_2, b_2 .
 - Écrire une fonction $ab(n)$ prenant en argument un entier $n \geq 1$ et renvoyant (a_n, b_n) .
 - Déterminer b_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
 - Montrer, par récurrence, que : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3}$.
- En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, R^n = \left[\frac{1}{3} - \frac{(-\frac{1}{2})^n}{3} \right] J + (-\frac{1}{2})^n I$.
- Retrouver l'expression de R^n par la formule du binôme de NEWTON.

PARTIE II — APPLICATION À UNE EXPÉRIENCE ALÉATOIRE Chaque jour, Bob travaille une matière parmi Biologie, Mathématiques, Physique¹ selon la règle suivante :

s'il travaille une matière un jour, il choisit le lendemain une des deux autres matières de manière équiprobable.

1. pour une raison que personne ne connaît il ne travaille pas l'Informatique

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note :

- B_n l'évènement « Bob travaille la biologie »,
- M_n l'évènement « Bob travaille les mathématiques »,
- P_n l'évènement « Bob travaille la physique ».

On notera alors que (B_0, M_0, P_0) forme un système complet d'évènements. Au jour 0, on suppose que Bob donne 50% de chances aux mathématiques, 30% à la physique et 20% à la biologie.

- Montrer que : $\mathbb{P}(B_1) = \frac{2}{5}, \mathbb{P}(P_1) = \frac{7}{20}, \mathbb{P}(M_1) = \frac{1}{4}$.
En déduire alors la valeur de $\mathbb{P}(B_2)$.
- Les évènements B_0 et M_1 sont-ils indépendants?
 - Avec quelle probabilité Bob travaille-t-il la biologie au jour 2 pour la première fois?
 - Avec quelle probabilité travaillait-il la physique au jour 1 si on l'observe au jour 2 travailler la biologie?

On note dans la suite : $X_n = \begin{pmatrix} \mathbb{P}(B_n) \\ \mathbb{P}(M_n) \\ \mathbb{P}(P_n) \end{pmatrix}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- Que vaut X_0 ?
- Justifier que (B_n, P_n, M_n) est un système complet d'évènements pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Dans cette question, on note $m_n = \mathbb{P}(M_n)$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.
 - Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(M_{n+1}) = \frac{1}{2}(\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(P_n)).$$
 - En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, m_{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}m_n.$$
 - En déduire l'expression de m_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$, puis déterminer et interpréter la valeur de : $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(M_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} m_n$.
- Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, X_{n+1} = R X_n$.
 - Donner, sans justifier, une formule reliant X_n, R^n et X_0 pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - En déduire une expression de $\mathbb{P}(B_n)$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Fin du sujet

Correction

Devoir surveillé n° 6

samedi 28/03/2026

Solution (exercice 2) [Énoncé]

1.

$$\begin{aligned} \sin(e^{3x} - 1) &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} e^{3x} - 1 && \text{car } e^{3x} - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\longrightarrow} 0 \\ &\underset{x \rightarrow 0}{\sim} \boxed{3x} && \text{car } 3x \underset{x \rightarrow 0}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

2. On a : $\left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)^x - 1 = e^{x \ln\left(\frac{x^2+2}{x^2-1}\right)} - 1 = e^{x \ln\left(1 + \frac{3}{x^2-1}\right)} - 1$. Donc :

$$\ln\left(1 + \frac{3}{x^2-1}\right) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{3}{x^2-1} \quad \text{car } \frac{3}{x^2-1} \underset{x \rightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$$

donc : $x \ln\left(1 + \frac{3}{x^2-1}\right) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{3x}{x^2-1}$. Comme $\frac{3x}{x^2-1} \underset{x \rightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$, on en déduit que

$x \ln\left(1 + \frac{3}{x^2-1}\right) \underset{x \rightarrow \infty}{\longrightarrow} 0$. Ainsi :

$$e^{x \ln\left(1 + \frac{3}{x^2-1}\right)} - 1 \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} x \ln\left(1 + \frac{3}{x^2-1}\right) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{3x}{x^2-1} \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \boxed{\frac{3}{x}}.$$

Solution (exercice 3) [Énoncé]

1. On remplace dans l'expression de P_t :

$$P_t\left(\frac{-2t}{3}\right) = \left(\frac{-2t}{3}\right)^3 + t\left(\frac{-2t}{3}\right)^2 + 1 = \frac{-8t^3}{3^3} + \frac{4t^3}{3^2} + 1 = \frac{4t^3}{3^3} + 1 > 0.$$

puisque $t \geq 0$.

2. La fonction P_t est polynomiale donc continue, de plus, elle est dérivable pour la même raison. De plus, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P'_t(x) = 3x^2 + 2tx = x(3x + 2t).$$

La fonction P'_t est un polynôme, il est donc donné par ses racines, qui sont 0 et $-\frac{2t}{3}$. De plus, $P_t(x) \underset{x \rightarrow \pm\infty}{\sim} x^3$, donc $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} P_t(x) = \pm\infty$. On déduit alors le tableau de variations ci-dessous.

x	$-\infty$	$-\frac{2t}{3}$	0	$+\infty$
$P_t(x)$	$-\infty$	> 0	1	$+\infty$

On cherche donc à appliquer le théorème de la bijection sur l'intervalle $]-\infty, -\frac{2t}{3}]$. La fonction P_t y est alors strictement croissante, continue, et réalise donc une bijection de $]-\infty, -\frac{2t}{3}]$ vers $]-\infty, P_t(-\frac{2t}{3})] \ni 0$ d'après la première question. De plus, la fonction ne s'annule pas sur $[-\frac{2t}{3}, +\infty[$. On déduit que :

$$\boxed{\exists ! r(t) \in \mathbb{R}, \quad P_t(r(t)) = 0, \quad \text{et : } r(t) \leq -\frac{2t}{3}}.$$

3.

$$\begin{aligned} P_t(-t-1) &= -t^3 - 3t^2 - 3t - 1 + t(t^3 + 2t + 1) + 1 \\ &= -t^2 - 2t \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{-t-1 \leq r(t) \leq -\frac{2t}{3}}$.

4. La question précédente va nous servir à initialiser l'algorithme de dichotomie.

4.1) def P(t, x):

```
return x**3+t*x**2+1
```

4.2) def racine(t, n):

```
a = -t-1
```

```
b = -2*t/3
```

```
while b - a > 10**(-n):
```

```
    c = (a + b)/2
```

```
    if P(t, a)*P(t, c) <= 0:
```

```
        b = c
```

```
    else:
```

```
        a = c
```

```
return (a + b)/2
```

```
>>> racine(0, 3) # doit approcher -1
```

```
-0.99951171875
```

Solution (exercice 4) [Énoncé]

1. On a $x \in \mathcal{D}_f \iff \begin{cases} 1+x > 0 \\ 4x \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x > -1 \\ x \neq 0 \end{cases}$. Donc $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$.

2. Comme $4x \underset{x \rightarrow 0}{\longrightarrow} 0$, on a : $f(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{x}{4x} = \frac{1}{4}$. Donc f est prolongeable par continuité en zéro en posant $\boxed{f(0) = \frac{1}{4}}$.

Solution (exercice 5) [Énoncé]

1. On a :

$$f(X^2) = (2X + 1)X^2 + (1 - X^2)2X = X^2 + 2X$$

$$f(X^3) = (2X + 1)X^3 + (1 - X^2)3X^2 = \boxed{-X^4 + X^3 + 3X^2}.$$

2. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.

2.1) Supposons que $\deg P \geq 3$. On note alors $P = a_n X^n + Q_n$ avec $n \geq 3$, $a_n = \text{dom } P$ et $\deg Q_n < n$. Alors :

$$f(P) = (2X + 1)(a_n X^n + Q_n) + (1 - X^2)(n a_n X^{n-1} + Q'_n) \\ = a_n(2 - n)X^{n+1} + R_n \quad \text{avec :}$$

$$R_n = 2XQ_n + a_n X^n + Q_n + n a_n X^{n-1} + Q'_n - X^2 Q'_n.$$

On constate que $\deg R_n < n + 1$, de sorte que $\boxed{\deg f(P) = n + 1}$, et comme $2 - n \neq 0$, $\boxed{\text{dom } f(P) = (2 - \deg P) \text{ dom } P}$.

2.2) Supposons que $f(P) = P$. Si par l'absurde $n = \deg P \geq 3$, la question précédente donnerait $\deg f(P) = n + 1$. Or par hypothèse $f(P) = P$ donc cela mène à $n = n + 1$ — **Contradiction** puisque $P \neq 0$ ($n \geq 3$).

On a bien montré : $[f(P) = P] \implies [\deg P \leq 2]$.

3. Soit P tel que $f(P) = P$. Alors d'après la question précédente $P = aX^2 + bX + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ à trouver. On remplace dans l'équation :

$$f(P) = P \iff (2X + 1)(aX^2 + bX + c) + (1 - X^2)(2aX + b) = aX^2 + bX + c$$

$$\iff (a + b)X^2 + (2a + b + 2c)X + (b + c) = aX^2 + bX + c$$

$$\iff a + b = a, \quad 2a + b + 2c = b + c, \quad b + c = c$$

$$\iff b = 0, \quad c = -2a.$$

L'ensemble des polynômes solution est donc l'ensemble des polynômes de la forme : $P = aX^2 - 2 = \boxed{a(X^2 - 2)}$.

Solution (problème 1) [Énoncé]

PARTIE I — CALCUL DES PUISSANCES D'UNE MATRICES

1. **Initialisation.** Pour $n = 1, J^1 = J$ et $3^0 J = J$. La propriété est vraie au rang 1.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, supposons $J^n = 3^{n-1} J$ et montrons alors que $J^{n+1} = 3^n J$. On a $J^{n+1} = J \times J^n = J \times 3^{n-1} J = 3^{n-1} J^2$. Or $J^2 = 3J$ après calcul direct, donc $J^{n+1} = 3^{n-1} \times 3J = 3^n J$.

Conclusion : la propriété est initialisée pour $n = 1$ elle est héréditaire, on conclut alors par principe de récurrence que : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, J^n = 3^{n-1} J}$.

2. C'est un calcul direct :

$$R = \frac{1}{2}(J - I) = \frac{1}{2} \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Montrons que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que $R^n = \frac{a_n J + b_n I}{2^n}$:

Initialisation. Pour $n = 1, R = \frac{1}{2}(J - I)$ donc a_1 et b_1 existent et $a_1 = 1, b_1 = -1$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, supposons l'existence de $(a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2$ tel que $R^n = \frac{a_n J + b_n I}{2^n}$. Nous avons alors :

$$R^{n+1} = R \times R^n = \frac{1}{2}(J - I) \times \frac{a_n J + b_n I}{2^n},$$

d'après l'hypothèse de récurrence. Ainsi, en développant :

$$R^{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} (a_n J^2 + b_n J - a_n J - b_n I).$$

Or $J^2 = 3J$, donc

$$R^{n+1} = \frac{1}{2^{n+1}} ((2a_n + b_n)J - b_n I).$$

Ainsi a_{n+1} et b_{n+1} existent en posant $a_{n+1} = 2a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -b_n$.

Conclusion : La propriété est initialisée pour $n = 1$ elle est héréditaire, on conclut alors par principe de récurrence que :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \exists (a_n, b_n) \in \mathbb{R}^2, R^n = \frac{a_n J + b_n I}{2^n}}.$$

4. **4.1)** Nous avons montré lors de la récurrence que $a_1 = 1, b_1 = -1$ et par ailleurs $a_2 = 2a_1 + b_1 = 1, b_2 = -b_1 = 1$.

4.2) def ab(n) :

$a, b = 0, 1$

for _ **in** range(1, n+1) :

$a, b = 2*a+b, -b$

return a, b

```
>>> ab(0)
```

```
(0, 1)
```

```
>>> ab(1)
```

```
(1, -1)
```

```
>>> ab(2)
```

```
(1, 1)
```

```
>>> ab(10)
```

```
(341, 1)
```

4.3) On d'après les questions précédentes que b est une suite géométrique

de raison -1 , et de premier terme $b_0 = 1$. Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = (-1)^n.$$

4.4) Montrer, par récurrence, que :

Initialisation. $a_0 = 0$ et $\frac{2^0 + (-1)^{0+1}}{3} = 0$. La propriété est donc vraie au rang $n = 0$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé, supposons $a_n = \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3}$. On a :

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 2a_n + b_n \\ &= 2 \times \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3} + (-1)^n \\ &= \frac{2^{n+1} + 2(-1)^{n+1} + 3(-1)^n}{3} \\ &= \frac{2^{n+1} - (-1)^{n+1}}{3} \\ &= \frac{2^{n+1} + (-1)^{n+2}}{3}. \end{aligned}$$

En conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = \frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3}$, par principe de récurrence.

5. Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} R^n &= \frac{a_n J + b_n I}{2^n} \\ &= \frac{1}{2^n} \left(\frac{2^n + (-1)^{n+1}}{3} J + (-1)^n I \right) \\ &= \frac{1}{3} \left(1 + \frac{(-1)^{n+1}}{2^n} \right) J + \left(-\frac{1}{2} \right)^n I \\ &= \frac{1}{3} \left(1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right) J + \left(-\frac{1}{2} \right)^n I. \end{aligned}$$

En conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad R^n = \left[\frac{1}{3} - \frac{(-1)^n}{3} \right] J + \left(-\frac{1}{2} \right)^n I$.

6. Comme les matrices J et $-I$ commutent, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} R^n &= \frac{1}{2^n} (J - I)^n = \frac{1}{2^n} (J + (-I))^n \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} J^k (-I)^{n-k} \\ &= \frac{1}{2^n} \left((-1)^n I + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} J^k (-1)^{n-k} I \right), \quad \text{car } J^k = 3^{k-1} J \text{ pour } k \geq 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2^n} \left((-1)^n I + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 3^{k-1} (-1)^{n-k} \right) \\ &= \frac{1}{2^n} \left((-1)^n I + \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 3^{k-1} (-1)^{n-k} \right) J \right) \\ &= \frac{1}{2^n} \left((-1)^n I + \frac{1}{3} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 3^k (-1)^{n-k} - (-1)^n \right) J \right) \\ &= \frac{1}{2^n} \left((-1)^n I + \frac{1}{3} ((3-1)^n - (-1)^n) J \right) \\ &= \frac{1}{2^n} \left((-1)^n I + \frac{1}{3} (2^n - (-1)^n) J \right) \\ &= \left[\left(-\frac{1}{2} \right)^n I + \frac{1}{3} \left(1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right) J \right]. \end{aligned}$$

PARTIE II — APPLICATION À UNE EXPÉRIENCE ALÉATOIRE

7. (B_0, M_0, P_0) forme un système complet d'évènements donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M_1) &= \mathbb{P}(B_0 \cap M_1) + \mathbb{P}(M_0 \cap M_1) + \mathbb{P}(P_0 \cap M_1) \\ &= \mathbb{P}(B_0) \times \mathbb{P}_{B_0}(M_1) + \mathbb{P}(M_0) \times \mathbb{P}_{M_0}(M_1) + \mathbb{P}(P_0) \times \mathbb{P}_{P_0}(M_1) \\ &= \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} \times \frac{3}{10} \\ &= \frac{2+3}{20} = \left[\frac{1}{4} \right]. \end{aligned}$$

De la même manière, en appliquant la formule des probabilités totales on obtient relativement au même système complet d'évènements :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(P_1) &= \mathbb{P}(B_0 \cap P_1) + \mathbb{P}(M_0 \cap P_1) + \mathbb{P}(P_0 \cap P_1) \\ &= \mathbb{P}(B_0) \times \mathbb{P}_{B_0}(P_1) + \mathbb{P}(M_0) \times \mathbb{P}_{M_0}(P_1) + \mathbb{P}(P_0) \times \mathbb{P}_{P_0}(P_1) \\ &= \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{5}{10} \times \frac{1}{2} + 0 = \left[\frac{7}{20} \right] \\ \mathbb{P}(B_1) &= 1 - \frac{5}{20} - \frac{7}{20} = \left[\frac{2}{5} \right]. \end{aligned}$$

De plus, (B_1, M_1, P_1) forme un système complet d'évènements aussi, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_2) &= \mathbb{P}(B_1 \cap B_2) + \mathbb{P}(M_1 \cap B_2) + \mathbb{P}(P_1 \cap B_2) \\ &= \mathbb{P}(B_1) \times \mathbb{P}_{B_1}(B_2) + \mathbb{P}(M_1) \times \mathbb{P}_{M_1}(B_2) + \mathbb{P}(P_1) \times \mathbb{P}_{P_1}(B_2) \\ &= 0 + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{7}{20} \times \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$= \frac{3}{10}.$$

8. 8.1) $\mathbb{P}(B_0 \cap M_1) = \mathbb{P}(B_0) \times \mathbb{P}_{B_0}(M_1) = \frac{2}{10} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$. D'autre part, $\mathbb{P}(B_0) \times \mathbb{P}(M_1) = \frac{1}{20}$. Comme $\mathbb{P}(B_0 \cap M_1) \neq \mathbb{P}(B_0) \times \mathbb{P}(M_1)$, on en déduit que les événements B_0 et M_1 ne sont pas indépendants.

8.2) On cherche à calculer $\mathbb{P}(\overline{B_0} \cap \overline{B_1} \cap B_2)$. Il n'y pas indépendance, on passe donc par les probabilités composées. On a alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\overline{B_0} \cap \overline{B_1} \cap B_2) &= \mathbb{P}(\overline{B_0}) \times \mathbb{P}_{\overline{B_0}}(\overline{B_1}) \times \mathbb{P}_{\overline{B_0} \cap \overline{B_1}}(B_2) \\ &= \frac{4}{5} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{5}, \end{aligned}$$

on a utilisé ici le fait que $\mathbb{P}_{\overline{B_0} \cap \overline{B_1}}(B_2) = \mathbb{P}_{\overline{B_1}}(B_2) = \frac{1}{2}$.

8.3) Il s'agit de renverser le conditionnement. D'après la formule de BAYES, on a donc :

$$\mathbb{P}_{B_2}(P_1) = \frac{\mathbb{P}(P_1)}{\mathbb{P}(B_2)} \times \mathbb{P}_{P_1}(B_2) = \frac{7}{20} \times \frac{10}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{7}{12}.$$

9. D'après l'énoncé, on a directement :
$$X_0 = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 1/2 \\ 3/10 \end{pmatrix}.$$

10. Chaque jour donné n , l'élève travaille une unique matière parmi les trois, donc (M_n, B_n, P_n) forme un système complet d'évènements.

11. 11.1) Soit $n \in \mathbb{N}$. On utilise à nouveau le système complet d'évènements (M_n, B_n, P_n) , ce qui livre d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(M_{n+1}) &= \mathbb{P}(B_n) \mathbb{P}_{M_{n+1}}(B_n) + \mathbb{P}(M_n) \mathbb{P}_{M_{n+1}}(M_n) + \mathbb{P}(P_n) \mathbb{P}_{M_{n+1}}(P_n) \\ &= \mathbb{P}(B_n) \frac{1}{2} + 0 + \mathbb{P}(P_n) \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (\mathbb{P}(B_n) + \mathbb{P}(P_n)). \end{aligned}$$

11.2) En exploitant ensuite que (M_n, B_n, P_n) est un système quasi-complet d'évènements, on déduit alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad m_{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} m_n.$$

11.3) La suite $(m_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est arithmético-géométrique. Cherchons le réel ℓ tel que $\ell = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ell$, après calculs on trouve alors $\ell = \frac{1}{3}$. Ensuite

$$\begin{cases} m_{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} m_n \\ \ell = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \ell \end{cases} \implies m_{n+1} - \ell = -\frac{1}{2} (m_n - \ell)$$

par différence. Donc la suite $m - \ell$ est géométrique de raison $-\frac{1}{2}$.

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad m_n = \frac{1}{6} \left(-\frac{1}{2} \right)^n + \frac{1}{3},$$

puisque $m_0 - \ell = m_0 - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. De plus, $-1 < -\frac{1}{2} < 1$ donc la suite admet une limite, elle vaut $\frac{1}{3}$. À long terme, la probabilité que Bob travaille les maths est de $\frac{1}{3}$.

12. 12.1) Soit $n \in \mathbb{N}$. Il s'agit d'exprimer $\mathbb{P}(M_{n+1}), \mathbb{P}(B_{n+1}), \mathbb{P}(P_{n+1})$ en fonction de $\mathbb{P}(M_n), \mathbb{P}(B_n)$ et $\mathbb{P}(P_n)$. On utilise à nouveau la formule des probabilités totales au système complet d'évènements (M_n, B_n, P_n) . On obtient alors :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B_{n+1}) &= \mathbb{P}(B_n) \mathbb{P}_{B_n}(B_{n+1}) + \mathbb{P}(M_n) \mathbb{P}_{M_n}(B_{n+1}) + \mathbb{P}(P_n) \mathbb{P}_{P_n}(B_{n+1}) \\ &= 0 \times \mathbb{P}(B_n) + \frac{1}{2} \times \mathbb{P}(M_n) + \frac{1}{2} \times \mathbb{P}(P_n). \end{aligned}$$

En procédant de-même pour les deux autres probabilités, on trouve

$$X_{n+1} = R X_n.$$

12.2) On pourrait montrer facilement par récurrence que $X_n = R^n X_0$ (attention, et pas $X_n = X_0 R^n$ car ce produit matriciel n'a pas de sens...).

12.3) En utilisant les résultats de la 1ère partie, on a :

$$\begin{aligned} X_n &= \left(\frac{1}{3} \left(1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right) J + \left(-\frac{1}{2} \right)^n I \right) X_0 \\ &= \frac{1}{3} \left(1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right) J X_0 + \left(-\frac{1}{2} \right)^n X_0 \\ &= \frac{1}{3} \left(1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(-\frac{1}{2} \right)^n \begin{pmatrix} 1/5 \\ 1/2 \\ 3/10 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$J X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

On déduit alors en isolant la première coordonnée que :

$$\mathbb{P}(B_n) = \frac{1}{3} \left(1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right) + \left(-\frac{1}{2} \right)^n \times \frac{1}{5}.$$