Programme de colles
du 4 au 8/5/2026

- Cette semaine : **1** question de cours dans la liste.
- Sur les espaces vectoriels : tout le programme. Concernant les variables aléatoires : uniquement des questions de cours cette semaine.

1 [MATHS] ESPACES VECTORIELS

Attention

- Les notions de sommes (normale et directe) ne sont pas au programme de BCPST. De fait, les notions associées (projecteurs, symétries, *etc.*) ne le seront pas non plus.
- Les considérations de changement de corps de base ne sont pas vraiment dans l'esprit du programme.

- **Structure d'espace vectoriel.** Définition. Espaces-vectoriels usuels (uplets et géométrie, polynômes, matrices, suites et fonctions). Règles de calcul secondaires dérivant de la définition. Combinaisons linéaires d'une famille finie de vecteurs, d'une famille quelconque. Sous-espace vectoriel. Nombreux exemples avec des vecteurs de $\mathbb{R}^n$, des suites, des fonctions, des polynômes, et les solutions d'une EDL homogène d'ordre un ou deux. Intersection d'espaces vectoriels. L'espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs forme un sous-espace vectoriel, et c'est le plus petit sous-espace vectoriel contenant cette famille. Propriétés sur le Vect. Description des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{K}^n$ sous forme paramétrique ou cartésienne.
- **Familles de vecteurs** : libres, génératrices et espaces vectoriels de dimension finie, bases. Notion de coordonnée d'un vecteur dans une base, bases canoniques. Complétion de familles libres, extraction de familles génératrices.
- **Dimension d'un espace vectoriel et représentation matricielle.** Toutes les bases ont même nombre d'éléments (fait largement admis). Définition de la dimension. Notion de droite, plan et d'hyperplan (pour les espaces vectoriels de dimension finie uniquement). Familles de $\dim \mathrm{E}$ vecteurs dans un espace vectoriel de dimension finie E. Dimension d'un sous-espace vectoriel. Représentation matricielle de vecteurs : pour un vecteur, puis pour une famille, propriété du symbole « Mat ». Rang d'une famille de vecteurs comme dimension de l'espace vectoriel engendré, lien avec le rang de la matrice associée dans une base (nombre de pivots d'une échelonnée). Trouver une base d'un Vect par échelonnement de la matrice de la famille.

QUESTIONS & EXEMPLES IMPORTANTS DE COURS

1. Donner la définition d'un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel. Montrer, en utilisant la définition, que l'ensemble
$$\mathrm{F} = \left\{ f \in \mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R}) \;\middle|\; \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = 0 \right\}$$
est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{C}^0([0,1],\mathbb{R})$.
2. Définir « $(x_1,\dots,x_n)$ libre dans E » *(pour les élèves : attention aux quantificateurs!)* ainsi que le résultat sur les familles échelonnées (notion à définir aussi) de polynômes.
3. Définir « $(x_1,\dots,x_n)$ génératrice de E » *(pour les élèves : on attend par exemple une écriture propre avec des quantificateurs, ou en terme de* Vect*)* puis « $(x_1,\dots,x_n)$ est une base de E ». Définir ce que l'on appelle les coordonnées d'un vecteur dans cette base.
4. Qu'appelle-t-on dimension d'un espace vectoriel de dimension finie? (on précisera le cas $\mathrm{E} = \{0_{\mathrm{E}}\}$). Montrer que $\mathrm{F} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x+y+z=0\right\}$ est un hyperplan de $\mathbb{R}^3$.
5. Qu'appelle-t-on dimension d'un espace vectoriel de dimension finie? Soit $\mathrm{F} = \{\mathrm{P} \in \mathbb{R}_5[\mathrm{X}] \mid \mathrm{P}(0) = \mathrm{P}'(0) = 0 = \mathrm{P}(1)\}$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_5[\mathrm{X}]$, et déterminer sa dimension.
6. **[Nettoyage de** Vect**]** On considère $u_1 = (2,-1,0), u_2 = (1,1,1), u_3 = (-1,2,1), u_4 = (1,1,0), u_5 = (0,-1,-1)$. Déterminer une base de :
$$\mathrm{F} = \mathrm{Vect}(u_1,u_2,u_3,u_4,u_5).$$
On pourra utiliser librement que la matrice de la famille est équivalente en lignes à : $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

7. Rappeler ce qu'on appelle le système complet d'évènements associé à une variable aléatoire finie. Écrire la formule des probabilités totales associé à ce système complet d'évènements : $\mathbb{P}(B) = \ldots$ pour tout évènement B.

8. Citer le théorème de transfert, puis établir que : $|\mathbb{E}(X)| \leqslant \mathbb{E}(|X|)$ pour toute variable aléatoire finie X.

9. Définir l'espérance et la variance d'une variable aléatoire réelle finie. Citer la formule de KÖNIG-HUYGENS et la démontrer.

À venir : les variables aléatoires.