

# Programme de colles

## du 18 au 22/5/2026

- Cette semaine : 1 question de cours dans la liste.
- Sur les applications linéaires : uniquement des questions de cours cette semaine.

### 1 [MATHS] VARIABLES ALÉATOIRES



#### Attention

• Quelques généralités sur les variables aléatoires réelles ont été développées en début de chapitre, mais les exercices resteront dans le cadre de variables aléatoires **finies**.

• Je n'ai **pas** traité cette année les inégalités de concentration (programme de 2A théoriquement).

• La variance de la loi uniforme n'est pas exigible (à rappeler ou faire démontrer dans un cas particulier si besoin).

• **Généralités.** Définition d'une variable aléatoire sur  $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P})$ , cas particuliers (finies, discrètes et continues). Opérations sur les variables aléatoires. Loi (comme étant  $I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{P}(X \in I)$ ) et fonction de répartition  $F_X$ , fonction d'anti-répartition  $1 - F_X$ . Propriétés analytiques et probabilistes de la fonction de répartition.

• **Variables aléatoires finies.** Système complet associé à une variable aléatoire finie. Reformulation de la notion de loi pour une variable aléatoire réelle finie : la donnée de  $X(\Omega)$  et  $\mathbb{P}(X = x)$  pour tout  $x \in X(\Omega)$ . La donnée de la loi est équivalente à la donnée de la fonction de répartition. Définition d'une variable aléatoire par sa loi, *i.e.* une suite positive de somme 1. Propriétés des variables aléatoires finies : opérations, allure de la fonction de répartition, reformulation de l'indépendance.

• **Moments d'une variables aléatoire finie.** Définition de l'espérance, variance, écart-type, moents. Propriétés de l'espérance : positivité, linéarité, croissance. Théorème du transfert et application. Propriétés de la variance. Centrée/réduite d'une variable aléatoire finie. Espérance d'un produit/variance d'une somme de variables

aléatoires réelles discrètes indépendantes (formule admise pour l'espérance d'un produit).

• **Lois finies usuelles.** Uniforme discrète sur un ensemble fini (définition, propriétés et simulation), BERNOULLI / RADEMACHER (définition, propriétés et simulation), lien entre BERNOULLI et RADEMACHER, binomiale (définition, propriétés et simulation).

### QUESTIONS & EXEMPLES IMPORTANTS DE COURS

1. Définition d'une application linéaire d'un espace vectoriel  $E$  dans un espace vectoriel  $F$ . Montrer que l'application moyenne  $M : \begin{cases} \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K} \\ (x_1, \dots, x_n) \rightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \end{cases}$  est une forme linéaire sur  $\mathbb{K}^n$ .
2. Soit  $V$  un sous-espace vectoriel de  $E$  et  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ , où  $E, F$  sont deux espaces vectoriels. Définir l'image directe  $u(V)$ , puis montrer que  $u(V)$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ .
3. Définition d'une application linéaire  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  avec  $E, F$  deux espaces vectoriels. Écrire la définition du noyau de  $u$ , puis montrer que  $\text{Ker } u$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
4. Rappeler ce qu'on appelle le système complet d'évènements associé à une variable aléatoire finie. Écrire la formule des probabilités totales associé à ce système complet d'évènements :  $\mathbb{P}(B) = \dots$  pour tout évènement  $B$ .
5. Citer le théorème de transfert, puis établir que :  $|\mathbb{E}(X)| \leq \mathbb{E}(|X|)$  pour toute variable aléatoire finie  $X$ .
6. Définir l'espérance et la variance d'une variable aléatoire réelle finie. Citer la formule de KÖNIG-HUYGENS et la démontrer.
7. Définir l'espérance et la variance d'une variable aléatoire réelle finie, rappeler les formules donnant  $\mathbb{E}(\lambda X + \mu Y)$  et  $\mathbb{V}(\lambda X + \mu)$ . Donner l'expression de la centrée-réduite  $X^*$  de  $X$ , et démontrer qu'elle est effectivement centrée/réduite.
8. ➤\_☞ Définir la loi de BERNOULLI et de RADEMACHER. Donner un script Python permettant de simuler la première. Montrer que si  $R \hookrightarrow \mathcal{R}(p)$ , alors  $\frac{1+R}{2} \hookrightarrow \mathcal{B}(p)$ . (Pour les élèves : nous avons montré cela en début d'exemple concernant la marche aléatoire sur  $\mathbb{Z}$ )
9. ➤\_☞ Loi binomiale : loi (définition) et script de simulation, expression de l'espérance et variance sans démonstration. Énoncer, **avec un vocabulaire précis**, l'expérience aléatoire typique qu'elle décrit.

10. Définir la loi binomiale. Énoncer, **avec un vocabulaire précis**, l'expérience aléatoire typique qu'elle décrit. Préciser sans démonstration la loi de  $n - X$  si  $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$ , et interpréter.

*À venir : les applications linéaires.*