Devoir surveillé n°7

Concours blanc

Le 11/05/2026 – Durée : 2h30

Consignes

- La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements, entreront pour une part importante dans l'appréciation de la copie. Les abréviations, sigles ou phrases nominales sont à proscrire.
- La numérotation des exercices (et des questions) doit être respectée et mise en évidence. Les résultats doivent être encadrés proprement.
- Il est important de numéroter correctement les pages des copies qui seront données à la correction. Chaque candidat est responsable de la vérification de son sujet d'épreuve : pagination et impression de chaque page.
- Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il convient de le signaler sur la copie et de poursuivre la composition en expliquant les raisons des initiatives qui ont été prises.
- Les candidats ne doivent avoir aucune communication entre eux ou avec l'extérieur durant l'épreuve. Aussi, l'utilisation des téléphones portables et, plus largement, de tout appareil permettant des échanges ou la consultation d'informations, est interdite.
- **Les téléphones sont éteints rangés dans les sacs mis à l'avant ou à l'arrière de la salle. Les trousses sont interdites. Les copies sont fournies, ainsi que les brouillons.**
- **L'usage de la calculatrice est interdit.**
- À l'issue de la durée prévue pour cette épreuve, les candidats doivent déposer le stylo et ne sont plus autorisés à écrire quoi que ce soit sur leur copie. Tout retard donne lieu à une pénalité sur la note finale.
- La numérotation des exercices (et des questions) doit être respectée et mise en évidence. Les résultats doivent être $\boxed{\text{encadrés}}$ proprement, <u>soulignés</u> ou bien surlignés.
- **Le crayon à papier ne sera pas corrigé.**
- **Les abus suivants entrainent la note de $\boxed{0/4}$ en rédaction :**
  - ◇ variables non quantifiées *(utiliser les symboles $\forall, \exists$, etc. appropriés.)*
  - ◇ confusion entre égalité = et équivalence $\iff$,
  - ◇ « la fonction $f(x)$ »,
  - ◇ un excès de phrases sans sens.

- Le sujet est composé d'un problème.
- Une fois l'épreuve terminée, vous rendrez vos copies sur le bureau à l'avant ; inutile de former deux tas distincts en fonction de la classe, elles seront corrigées par un même correcteur.

Bonne chance ! 💪

SCAV — Service des Concours Agronomiques et Vétérinaires — AgroParisTech

Épreuve de format « Modélisation » du concours Agro–Véto

Remarque préliminaire sur l'épreuve de modélisation : les questions dites d'interprétation et compréhension de modèle doivent être traitées de manière percutante. Le nombre de points obtenu n'est pas fonction croissante du nombre de lignes de la réponse. Ainsi, il est complètement déraisonnable d'envisager des réponses d'une demi-page.

Problème 1 | Étude d'une dynamique de population dans un milieu à capacité : le modèle de Ricker

[Solution] Ce problème est constitué de deux parties largement indépendantes.

L'objectif de ce problème est d'étudier l'évolution d'une population de poissons dans un lac.

Partie I — Étude d'une fonction

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f par : $f(x) = x\mathrm{e}^{-x}$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$, en précisant les limites aux bornes du domaine de définition.
2. Donner l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0, que l'on note $y = ax + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ à déterminer.
3. En analysant le signe de $f(x) - (ax + b)$, déterminer la position relative de $\mathscr{C}$ par rapport à sa tangente en zéro.
4. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans un repère orthonormé, en plaçant la tangente au point d'abscisse 0.
5. **5.1)** Déterminer l'unique primitive de f qui s'annule en zéro.

   5.2) Résoudre sur $\mathbb{R}$: $\begin{cases} y' + x\mathrm{e}^{-x}y &= 0 \\ y(0) &= 1. \end{cases}$

Partie II — Étude d'une population de poissons, sans prélèvement

Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on note y_n le nombre de poissons de l'année n, l'année 0 représentant la date du début de l'étude. On suppose que l'évolution de la population de poissons est modélisée par :

$$y_0 > 0 \quad \text{et :} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad y_{n+1} = y_n \mathrm{e}^{r\left(1 - \frac{y_n}{\mathrm{K}}\right)} \tag{1}$$

où r et K sont des constantes strictement positives.

II — 1) Étude de l'influence des constantes

6. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_n > 0$.

7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que :

- si $y_n > K$, alors : $y_{n+1} < y_n$
- si $y_n < K$, alors : $y_{n+1} > y_n$
- si $y_n = K$, alors : $y_{n+1} = y_n$.

On dit que K représente la capacité d'accueil du milieu. Comment les résultats précédents permettent-ils de justifier ce terme ?

8. On pose $\boxed{\alpha = e^r}$. On dit que α représente le *taux de croissance intrinsèque*. En considérant la relation (1) pour une valeur très grande de K (c'est-à-dire une situation théorique de ressources illimités pour les poissons), justifier cette appellation.

II — 2) Étude d'une suite récurrente

On pose $\boxed{b = \frac{r}{K}}$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = b y_n.$$

9. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = \alpha x_n e^{-x_n}$.

10. Justifier que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n > 0$.

On définit sur $\mathbb{R}_+$ la fonction f_α par : $f_\alpha(x) = \alpha x e^{-x} = \alpha f(x)$ de sorte que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+1} = f_\alpha(x_n).$$

11. Dans cette question, on importera la ou les modules nécessaires à la bonne exécution des deux fonctions.

11.1) Écrire en langage Python une fonction `f(alpha, x)` qui prend en arguments un réel `alpha` représentant α et un réel x et qui renvoie la valeur de $f_\alpha(x)$.

11.2) Écrire une fonction `suiteX(x0, alpha)` qui prend en arguments un réel `x0` représentant x_0 et un réel `alpha` représentant α, et qui renvoie la liste des valeurs $[x_0, x_1, \dots x_{10}]$.

12. Dresser le tableau de variation de la fonction f_α sur $\mathbb{R}_+$.

13. Étudier le signe de $f_\alpha(x) - x$ sur $\mathbb{R}_+$.

Dans toute la suite, on fera appel aux résultats établis sur f et f_α pour répondre efficacement aux questions concernant les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$

II — 3) Étude d'un premier cas

On rappelle que $\alpha = e^r$, on suppose ici que $\alpha < e$, c'est-à-dire que : $r < 1$. On suppose de plus que $x_0 \in]0, r]$.

14. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n \in]0, r]$.

15. Justifier que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

16. Montrer que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite que l'on déterminera.

17. En déduire que la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. La limite obtenue vous paraît-elle cohérente avec la situation modélisée ?

II — 4) Étude d'un deuxième cas

Rappels sur le module `matplotlib`

On rappelle ici quelques fonctions du module `matplolib.pyplot` qui permet de tracer des graphiques. On suppose désormais, dans tout le sujet, que ce module est importé comme suit :

```python
import matplolib.pyplot as plt
```

Les variables `X` et `Y` représentant ici deux listes de nombres, de même longueur :

- `plt.plot(X, Y)` → place les points dont les abscisses sont contenues dans `X` et les ordonnées dans `Y` et les relie entre eux par des segments.
- `plt.plot(X, Y, "o")` → même effet que `plt.plot(X, Y)` à la différence près que les points sont représentés par des petits cercles et ne sont pas reliés entre eux.
- `plt.grid()` → dessine un quadrillage en arrière-plan.
- `plt.show()` → affiche les tracés préalablement définis.

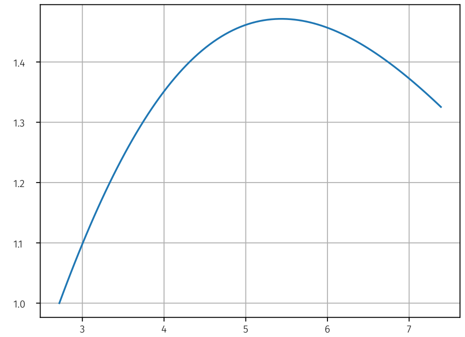
On suppose ici que $\alpha \in]e, e^2[$, c'est-à-dire que : $1 < r < 2$.

18. On considère la fonction `mystere` ci-dessous sans argument :

```python
def tracerAlpha():
    X = np.linspace(np.e, np.e**2, 100)
    Y = [f(alpha, alpha/np.e) for alpha in X]
    plt.plot(X, Y)
    plt.grid()
    plt.show()
```

18.1) Écrire une plusieurs importations de module(s) afin que cette fonction s'exécute correctement.

18.2) L'exécution du code précédent fournit alors la figure suivante.



Expliquer, en une phrase et avec un vocabulaire précis, à quelle fonction correspond ce graphe et sur quel intervalle. Expliquer ensuite comment cette représentation graphique permet de conjecturer que :

$$\forall \alpha \in \left]\mathrm{e}, \mathrm{e}^2\right[, \quad f_\alpha\left(\frac{\alpha}{\mathrm{e}}\right) > 1.$$

Comment pourriez-vous le démontrer mathématiquement? *(on ne demande pas de le faire)* **Dans la suite on admettra ce résultat.**

19. On souhaite établir dans cette question quelques propriétés additionnelles sur f_α.

19.1) Calculer f_α'', puis dresser le tableau de variations de f_α' sur $[0, +\infty[$.

19.2) En déduire que : $\forall x \in [1, +\infty[, \quad |f_\alpha'(x)| \leqslant \mathrm{M}$, où : $\mathrm{M} = \alpha \mathrm{e}^{-2}$.

19.3) Montrer que l'équation $f_\alpha(x) = 1$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}_+$. On notera λ_α la solution dans $]0, 1[$ et μ_α la solution dans $]1, +\infty[$, 1 n'étant pas solution.

19.4) Constatons que : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_\alpha(x) = 1 \iff g_\alpha(x) = 0$ où $g_\alpha(x) = f_\alpha(x) - 1$. Définir la fonction python `g(alpha, x)` correspondant à $g_\alpha(x)$, puis écrire une fonction `approx_lam(alpha)` renvoyant une valeur approchée de λ_α à 10^{-3} près.

20. On suppose alors que : $x_0 \in [\lambda_\alpha, \mu_\alpha]$ et on souhaite dans cette question étudier la nature des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

20.1) En utilisant le résultat (admis) de la question 18.2, vérifier que :

$$1 < \frac{\alpha}{\mathrm{e}} < \mu_\alpha.$$

20.2) Montrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x_n \in [1, \mu_\alpha]$.

20.3) **[Question de cours]** Rappeler, avec cadre et hypothèse(s) complète(s), le théorème des accroissements finis.
Montrer alors que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |x_{n+1} - r| \leqslant \mathrm{M}\,|x_n - r|$.

20.4) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |x_n - r| \leqslant \mathrm{M}^{n-1}\,|x_1 - r|$.

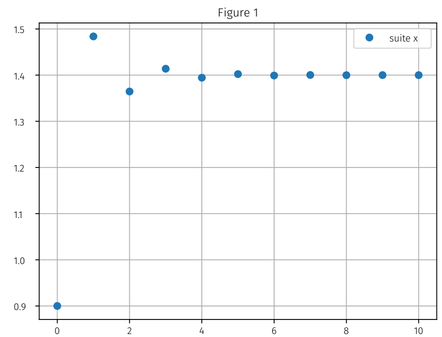
20.5) Déterminer $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{M}^{n-1}$. En déduire que la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite que l'on précisera.

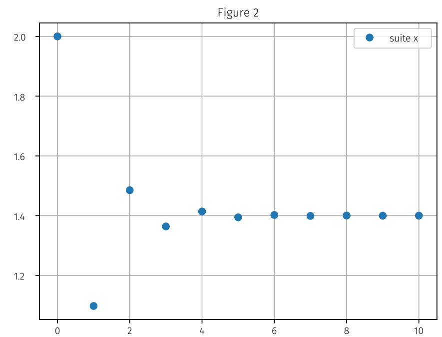
20.6) Que peut-on dire de la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$? Ce résultat vous paraît-il cohérent avec la situation modélisée?

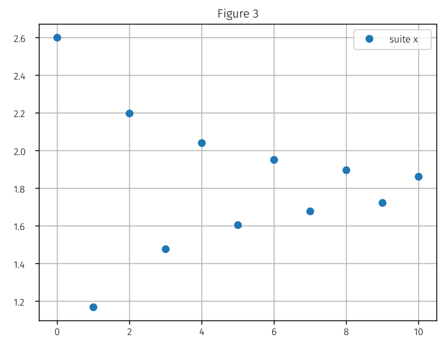
II — 5) Représentations graphiques

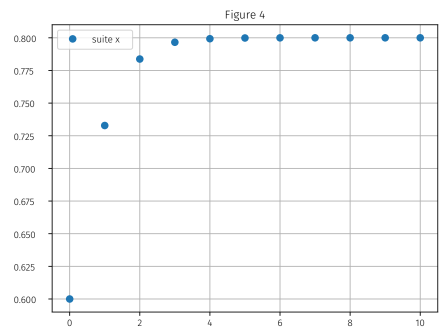
21. Écrire une fonction `tracerX(x0, alpha)`, utilisant la fonction `suiteX(x0, alpha)` définie précédemment, qui prend en arguments un réel `x0` représentant x_0 et un réel `alpha` représentant α et qui trace les points de coordonnées $(0, x_0), (1, x_1), \ldots (10, x_{10})$.

22. Cette fonction étant définie, on l'applique en calculant x_0 à partir d'une population initiale de poissons $y_0 = 3000$, avec différentes valeurs de r et K. Déterminer graphiquement, pour chaque figure, la valeur de x_0, r puis en déduire une estimation de K. On précisera si les valeurs des constantes correspondent au premier ou au deuxième cas étudié dans le problème.









II — 6) Estimation statistique des paramètres

On souhaite dans cette partie estimer les paramètres du modèle à l'aide d'une régression. On suppose que des relevés de $(y_n)_{n\in[\![0,10]\!]}$ sont stockés dans un fichier externe `donnees.txt` qui a la forme suivante (chaque ligne correspond à une valeur de y, la première correspondant à y_0) :

```
3000
3664
3918
3982
...
```

Ce fichier possède donc 11 lignes.

Rappels sur les fichiers

- `f = open("monfichier.txt", "r")` ouvre le document intitulé `monfichier.txt` (en mode lecture); le fichier est alors désigné par la variable `f`.
- `f.read()` lit l'intégralité du contenu du fichier `f` et le renvoie sous forme d'une chaine de caractères.
- `f.readline()` lit la première ligne du fichier `f` et la renvoie sous forme d'une chaine de caractères. Ré-exécuter `f.readline()` lit alors la deuxième ligne; et ainsi de suite.
- `for ligne in f:` parcourt le fichier, et `ligne` correspond alors à une ligne du fichier.
- `f.close()` ferme le fichier `f`.
- Le caractère `\n` (de longueur 1) désigne pour rappel le passage à la ligne.

23. Écrire une fonction `lecture()`, sans argument, qui lit le fichier puis renvoie une liste composée des entiers stockés dans `donnees.txt`. Dans la suite, on stocke son résultat dans une variable `Y` :

```
Y = lecture()
```

24. Écrire une fonction `statistiques()` sans argument, qui renvoie la plus petite valeur de Y, la moyenne et la plus grande valeur. Que vaut `len(L)` ?

25. On rappelle que (y_n) vérifie la relation de récurrence :

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad y_{n+1}=y_n \mathrm{e}^{r\left(1-\frac{y_n}{K}\right)}.\quad \text{On note de plus :}\quad z_n=\ln\left(\frac{y_{n+1}}{y_n}\right).$$

25.1) Déterminer $a, b\in\mathbb{R}$ tels que : $\forall n\in\mathbb{N},\quad z_n=b+ay_n$.

25.2) Écrire une ou plusieurs commandes permettant de calculer la liste `Z` $=[z_0,\dots,z_9]$.

25.3) Expliquer alors comment vous pourriez estimer les paramètres r et K.

Fin du sujet

Correction
Devoir surveillé n° 7
Le 11/05/2026 – Durée : 2h30

Solution (problème 1) [Énoncé]

Partie I — Étude d'une fonction

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f par : $f(x) = xe^{-x}$. On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

1. La fonction est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable par produit, de plus :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x} = (1-x)\mathrm{e}^{-x}.$$
Ainsi, f' est positive sur $]-\infty, 1]$, et négative sinon. On déduit :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$\frac{1}{\mathrm{e}}$	↘	0

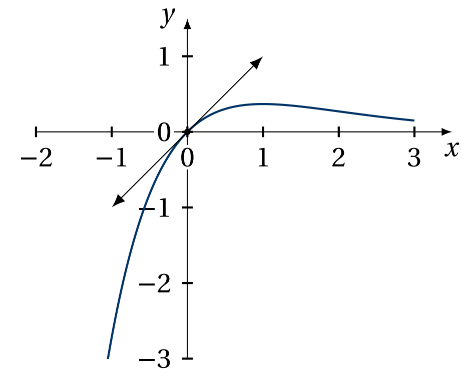
La limite en $+\infty$ provient des croissances comparées.

2. On a $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$ donc $\boxed{y = x}$ est l'équation de la tangente en zéro.

3. On a : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) - x = xe^{-x} - x = x(\mathrm{e}^{-x} - 1)$. On déduit alors le tableau de signes ci-après :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x		$-$	0	$+$	
$e^{-x} - 1$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$	0	$-$	

Donc : $\boxed{\mathscr{C}_f \text{ au-dessous de sa tangente en zéro}}$.



4.

5. **5.1)** Une telle primitive existe puisque f est continue sur $\mathbb{R}$. Notons-la F. De plus, puisque les fonctions $t \longmapsto -\mathrm{e}^{-t}$ et $t \longmapsto t$ sont de classe $\mathscr{C}^1$, on par intégration par parties :
$$\begin{aligned}
\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{F}(x) &= \int_0^x t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_0^x (-\mathrm{e}^{-t})\,\mathrm{d}t + \left[t(-\mathrm{e}^{-t})\right]_0^x \\
&= \int_0^x \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t + \left[t\mathrm{e}^{-t}\right]_x^0 \\
&= \left[-\mathrm{e}^{-t}\right]_0^x + \left[t\mathrm{e}^{-t}\right]_x^0 \\
&= 1 - \mathrm{e}^{-x} - x\mathrm{e}^{-x} = \boxed{1 - \mathrm{e}^{-x}(1+x)}.
\end{aligned}$$

5.2) Résoudre sur $\mathbb{R}$: $\begin{cases} y' + xe^{-x}y &= 0 \\ y(0) &= 1. \end{cases}$ On a ici une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1, à coefficients constants. L'ensemble des solutions est donc celui de son homogène.

Ici, avec les notations du cours, on a $a(x) = -f(x)$, donc $\mathrm{A}(x) = -\mathrm{F}(x)$. Donc l'ensemble des solutions est :
$$\mathscr{S} = \left\{x \longmapsto \mathrm{K}\mathrm{e}^{-\mathrm{F}(x)} \,\middle|\, \mathrm{K} \in \mathbb{R}\right\}.$$
Comme $\mathrm{F}(0) = 0$, la condition $y(0) = 1$ donne : $\mathrm{K}e^0 = 1$ soit $\mathrm{K} = 1$. Ainsi, l'unique solution est :
$$\boxed{y : x \longmapsto \mathrm{e}^{\mathrm{e}^{-x}(1+x)-1}}.$$

Partie II — Étude d'une population de poissons, sans prélèvement

II — 1) Étude de l'influence des constantes

6. **Initialisation.** La propriété est initialisée puisque $y_0 > 0$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $y_n > 0$. Comme $\mathrm{e}^{r\left(1-\frac{y_n}{K}\right)} > 0$ on a par produit : $y_{n+1} > 0$.

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_n > 0.}$

7. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$y_{n+1} - y_n = y_n\left(\mathrm{e}^{r\left(1-\frac{y_n}{K}\right)} - 1\right).$$

Comme $y_n > 0$, le signe de $y_{n+1} - y_n$ est celui de $\mathrm{e}^{r\left(1-\frac{y_n}{K}\right)} - 1$. Or,

$$\mathrm{e}^{r\left(1-\frac{y_n}{K}\right)} - 1 > 0 \iff \mathrm{e}^{r\left(1-\frac{y_n}{K}\right)} > 1 \iff \cancel{r}\left(1 - \frac{y_n}{K}\right) > 0$$
$$\iff 1 - \frac{y_n}{K} > 0 \iff y_n < K$$

puisque $K > 0$. On a donc :

- si $y_n < K$, alors : $y_{n+1} > y_n$,
- si $y_n > K$, alors : $y_{n+1} < y_n$ en résolvant la même inéquation que précédemment mais avec un < 0.
- Si $y_n = K$, alors : $y_{n+1} = y_n$ car alors $\mathrm{e}^{r\left(1-\frac{y_n}{K}\right)} - 1 = 0$.

Lorsqu'un terme de y est strictement supérieur ou inférieur à K, alors le terme suivant sera plus proche de K, et si $y_n = K$ (capacité atteinte, alors la suite est constante sur cette capacité).

8. On pose $\boxed{\alpha = \mathrm{e}^r}$. On dit que α représente le *taux de croissance intrinsèque*. La relation (1) pour une valeur très grande de K est alors $y_{n+1} \approx \mathrm{e}^r y_n$ puisque l'exponentielle est proche de 1 pour K très grand, et donc $\frac{y_{n+1}}{y_n} = \mathrm{e}^r$ est alors bien le taux d'évolution de y. On le qualifie également d'« intrinsèque » car il ne dépend pas des caractéristiques du milieu (capacité K notamment).

II — 2) Étude d'une suite récurrente

On pose $\boxed{b = \frac{r}{K}}$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n = b y_n.$$

9. Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors :

$$x_{n+1} = b y_{n+1} = b y_n \mathrm{e}^{r\left(1-\frac{y_n}{K}\right)}$$
$$= \mathrm{e}^r b y_n \mathrm{e}^{-r\frac{y_n}{K}} = \mathrm{e}^r b y_n \mathrm{e}^{-b y_n} = \boxed{\alpha x_n \mathrm{e}^{-x_n}}.$$

10. On sait déjà que la suite y est strictement positive, et $b > 0$, donc :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n > 0.}$$

11. Dans cette question, on importera la ou les modules nécessaires à la bonne exécution des deux fonctions.

11.1)
```python
import numpy as np
def f(alpha, x):
    return alpha*x*np.exp(-x)
```

11.2)
```python
def suiteX(x0, alpha):
    x = x0
    X = [x]
    for _ in range(1, 11):
        x = f(alpha, x)
        X.append(x)
    return X
```

12. On a $f_\alpha = \alpha f$ avec $\alpha > 0$, on déduit alors le tableau de variations de f_α à partir de celui de f.

x	0	1	$+\infty$
$f_\alpha(x)$	0 ↗	$\frac{\alpha}{\mathrm{e}}$	↘ 0

13. Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Alors :

$$f_\alpha(x) - x = \alpha x \mathrm{e}^{-x} - x = x(\alpha \mathrm{e}^{-x} - 1).$$

En résolvant, on trouve que : $\alpha \mathrm{e}^{-x} - 1 \geqslant 0 \iff x \leqslant \ln(\alpha)$. Or $\alpha > 1$ car $r > 0$, donc $\ln \alpha > 0$. D'où le tableau de signe ci-dessous :

x	0		$\ln(\alpha) = r$		$+\infty$
$f_\alpha(x) - x$	0	$+$	0	$-$	

II — 3) Étude d'un premier cas

On suppose ici que $\alpha < \mathrm{e}$, c'est-à-dire que : $\boxed{r < 1}$. On suppose de plus que $\boxed{x_0 \in]0, r]}$.

14. **Initialisation.** La propriété est initialisée, d'après l'hypothèse sur x_0.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $x_n \in]0, r]$. Montrons que $x_{n+1} \in]0, r]$. On a $x_{n+1} = f_\alpha(x_n)$. Or f_α est strictement croissante sur $]0, r] \subset]0, 1]$, donc $x_{n+1} \in]f_\alpha(0), f_\alpha(r)] =]0, r]$ car $f_\alpha(r) = \alpha r \mathrm{e}^{-r} = \alpha r \frac{1}{\alpha} = r$.

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_n \in]0, r]}$.

15. Notons $g_\alpha = f_\alpha - \mathrm{Id}$. Alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} - x_n =$

$g_\alpha(x_n)$. Puisque $x_n \in]0, r]$ et que g_α est positive sur $]0, r]$, on déduit que $\boxed{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est croissante}}$.

16. La suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante majorée par r, donc converge disons vers $\ell \in [0, r]$. Comme f_α est continue, on a $\ell = f_\alpha(\ell)$, donc $g_\alpha(\ell) = 0$. D'après le tableau de signe de g_α, $\ell \in \{0, r\}$. Comme $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, on a $x_n \geqslant x_0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, donc $\ell \geqslant x_0 > 0$. Ainsi $\ell = r$. En conclusion : $\boxed{\lim\limits_{n\to\infty} x_n = r}$.

17. Dès lors, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \frac{r}{b} = \boxed{K}$. Cette conclusion rejoint la définition de K en temps que « capacité du milieu ».

II — 4) Étude d'un deuxième cas

On suppose ici que $\alpha \in \left]e, e^2\right[$, c'est-à-dire que : $\quad 1 < r < 2$.

18. **18.1)**

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

18.2) La fonction Python trace la fonction mathématique $g : \alpha \longmapsto f_\alpha\left(\frac{\alpha}{e}\right)$ sur l'intervalle $[e, e^2]$. On peut donc conjecturer que :

$$\forall \alpha \in [e, e^2], \quad f_\alpha\left(\frac{\alpha}{e}\right) > 1.$$

Et donc que :

$$\boxed{\forall \alpha \in \left]e, e^2\right[, \quad f_\alpha\left(\frac{\alpha}{e}\right) > 1}.$$

Une étude des variations de $g - 1$ permettrait de montrer que $g - 1$ est strictement positive.

19. On souhaite établir dans cette question quelques propriétés additionnelles sur f_α.

19.1) Soit $x \in \mathbb{R}^+$. Alors :

$$f'_\alpha(x) = \alpha f'(x) = \alpha(1-x)e^{-x},\ f''_\alpha(x) = -\alpha e^{-x}\left(1 + (1-x)\right) = \alpha e^{-x}(x-2).$$

On déduit alors :

x	0		1		2		$+\infty$
$f'_\alpha(x)$	α	$\searrow$	0	$\searrow$	$-\alpha e^{-2}$	$\nearrow$	0

19.2) Soit $x \in [1, +\infty[$, on constate d'après le tableau précédent que f'_α est négative. Ainsi, $|f'_\alpha(x)| = -f'_\alpha(x)$. Mais toujours d'après le tableau, $f'_\alpha(x) \geqslant -\alpha e^{-2}$, donc $|f'_\alpha(x)| = -f'_\alpha(x) \leqslant \alpha e^{-2}$. Donc : $\boxed{\forall x \in [1, +\infty[, \quad |f'_\alpha(x)| \leqslant M}$, où : $\boxed{M = \alpha e^{-2}}$.

19.3)
- **[Théorème de la bijection sur $]0, 1[$]** Sur $]0, 1[$, f_α est strictement croissante et continue, donc réalise une bijection de $]0, 1[$ vers $f_\alpha(]0, 1[) =]\lim_0 f_\alpha, \lim_1 f_\alpha[=]0, \alpha e^{-1}[\ni 1$ car $\alpha > e$. Cela justifie l'existence et unicité de λ_α.
- **[Théorème de la bijection sur $]1, +\infty[$]** Sur $]1, +\infty[$, f_α est strictement décroissante et continue, donc réalise une bijection de $]1, +\infty[$ vers $f_\alpha(]1, +\infty[) =]\lim_{+\infty} f_\alpha, \lim_1 f_\alpha[=]0, \alpha e^{-1}[\ni 1$ car $\alpha > 1$. Cela justifie l'existence et unicité de μ_α.

19.4)

```python
def g(alpha, x):
    return f(alpha, x) - 1

def approx_lam(alpha):
    a, b = 0, 1
    while b-a > 10**(-3):
        m = (a+b)/2
        if g(alpha, a)*g(alpha, m) < 0:
            b = m
        else:
            a = m
    return (a+b)/2
```

```python
>>> alpha = 2.9
>>> lamba = approx_lam(alpha)
>>> lamba
0.68212890625
>>> f(alpha, lamba) # proche de 1, c'est gagné !
np.float64(1.0000452048617006)
```

20. On suppose alors que : $\quad x_0 \in [\lambda_\alpha, \mu_\alpha] \quad$ et on souhaite dans cette question étudier la nature des suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

20.1) Constatons d'abord que $f_\alpha(1) > f_\alpha\left(\frac{\alpha}{e}\right) > f_\alpha(\mu_\alpha) = 1$. En effet, cet encadrement est vérifié puisque $f_\alpha\left(\frac{\alpha}{e}\right) > 1$ d'après 18.2, et que $1 < \frac{\alpha}{e}$ avec f_α décroissante strictement sur $\left]1, \frac{\alpha}{e}\right[$.

Comme f_α est strictement décroissante sur $[1, \mu_\alpha]$, on obtient l'encadrement demandé en renversant le sens des inégalités :

$$\boxed{1 < \frac{\alpha}{e} < \mu_\alpha}.$$

20.2) **Initialisation.** Pour $n = 1$, $x_1 = f(x_0)$ avec $x_0 \in [\lambda_\alpha, \mu_\alpha]$. En utilisant le tableau de variations de f_α, on voit ensuite que $x_1 \in \left[1, \frac{\alpha}{e}\right]$. D'après la question précédente, on a alors $x_1 \in [1, \mu_\alpha]$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que $x_n \in [1, \mu_\alpha]$. Comme f_α est décroissante sur $[1, \mu_\alpha]$, alors $x_{n+1} = f_\alpha(x_n) \in [f_\alpha(\mu_\alpha), f_\alpha(1)] = [1, \frac{\alpha}{e}] \subset [1, \mu_\alpha]$.

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad x_n \in [1, \mu_\alpha]}$.

20.3) **[Question de cours]** Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ ($a < b$ deux réels), et dérivable sur $]a, b[$. Alors :

$$\exists c \in]a, b[, \quad f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Prenons $f = f_\alpha$.

- **[Cas 1 : $x_n > r$]** Prenons $a = r, b = x_n$, alors :

$$\exists c_n \in]a, b[, \quad f'_\alpha(c_n) = \frac{f_\alpha(x_n) - f_\alpha(r)}{x_n - r} = \frac{x_{n+1} - r}{x_n - r}.$$

Donc : $|x_{n+1} - r| = |f'_\alpha(c_n)|\,|x_n - r| \leqslant \mathrm{M}\,|x_n - r|$.

- **[Cas 2 : $x_n < r$]** Prenons $a = x_n, b = r$, on obtient la même inégalité en tenant compte de la parité de la valeur absolue.
- **[Cas 3 : $x_n = r$]** Inégalité vérifiée car $x_{n+1} = f_\alpha(r) = r$ et donc l'inégalité est $0 \leqslant 0$.

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |x_{n+1} - r| \leqslant \mathrm{M}\,|x_n - r|}$.

20.4) **Initialisation.** Pour $n = 1$, l'inégalité est vérifiée puisque c'est $|x_1 - r| \leqslant 1\,|x_1 - r|$.

Hérédité. Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ fixé tel que $|x_n - r| \leqslant \mathrm{M}^{n-1}\,|x_1 - r|$. Alors :

$$|x_{n+1} - r| \leqslant \mathrm{M}\,|x_n - r| \leqslant \mathrm{M}\mathrm{M}^{n-1}\,|x_1 - r| = \mathrm{M}^n\,|x_1 - r|.$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \boxed{|x_n - r| \leqslant \mathrm{M}^{n-1}\,|x_1 - r|}$.

20.5) $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{M}^{n-1} = 0$ car $0 < \mathrm{M} < 1$ étant donnée l'hypothèse sur α. Par théorème d'encadrement, on déduit alors que $\boxed{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } r}$.

20.6) La suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge alors vers $\frac{r}{b} = \mathrm{K}$. On retrouve là encore l'interprétation de K en tant que « capacité du milieu ».

II — 5) Représentations graphiques

21.
```python
def tracerX(x0, alpha):
    X = suiteX(x0, alpha)
    plt.grid()
    plt.plot(X, "o")
    plt.legend()
    plt.show()
```

22.
- **[Figure 1]** Comme $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = r$, on a graphiquement $\boxed{r = 1.4}$, et $\boxed{x_0 = 0.9}$. Donc comme $x_0 = by_0$ on déduit que $b = \frac{x_0}{y_0} = \frac{0.9}{3000} = \boxed{3 \times 10^{-4}}$.
Mais $\mathrm{K} = \frac{r}{b} = \frac{1.4}{3\times10^{-4}} = \boxed{\frac{14}{3} \times 10^3}$.
- **[Figure 2]** Comme $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = r$, on a graphiquement $\boxed{r = 1.4}$, et $\boxed{x_0 = 2}$. Donc comme $x_0 = by_0$ on déduit que $b = \frac{x_0}{y_0} = \frac{2}{3000} = \boxed{\frac{2}{3} \times 10^{-3}}$.
Mais $\mathrm{K} = \frac{r}{b} = \frac{1.4}{\frac{2}{3}\times10^{-3}} = \boxed{2.1 \times 10^3}$.
- **[Figure 3]** Comme $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = r$, on a graphiquement $\boxed{r = 1.8}$, et $\boxed{x_0 = 2.6}$. Donc comme $x_0 = by_0$ on déduit que $b = \frac{x_0}{y_0} = \frac{2.6}{3000} = \boxed{\frac{26}{3} \times 10^{-4}}$.
Mais $\mathrm{K} = \frac{r}{b} = \frac{1.8}{\frac{26}{3}\times10^{-4}} = \boxed{\frac{27}{13} \times 10^3}$.
- **[Figure 4]** Comme $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = r$, on a graphiquement $\boxed{r = 0.8}$, et $\boxed{x_0 = 0.6}$. Donc comme $x_0 = by_0$ on déduit que $b = \frac{x_0}{y_0} = \frac{0.6}{3000} = \boxed{2 \times 10^{-4}}$.
Mais $\mathrm{K} = \frac{r}{b} = \frac{0.8}{2\times10^{-4}} = \boxed{4 \times 10^3}$.

II — 6) Estimation statistique des paramètres

23.
```python
def lecture():
    f = open("donnnees.txt")
    L = []
    for ligne in f:
        L.append(float(ligne))# enlève saut de ligne si \
        ↪ présent
    return L
```

24.
```python
def statistiques():
    m, M, S = Y[0], Y[0], 0
    for x in L[1:]:
        if x > M:
            M = x
        if x < m:
            m = x
        S += x
    return m, S/len(L), M
```

25. On rappelle que (y_n) vérifie la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad y_{n+1} = y_n \mathrm{e}^{r(1-\frac{y_n}{\mathrm{K}})}. \quad \text{On note de plus :} \quad z_n = \ln\left(\frac{y_{n+1}}{y_n}\right).$$

25.1) Soit $n \in \mathbb{N}$, en passant au logarithme dans la relation de récurrence, on a :

$$z_n = \ln\left(\frac{y_{n+1}}{y_n}\right) = r\left(1 - \frac{y_n}{\mathrm{K}}\right) = r + \left(-\frac{r}{\mathrm{K}}\right) y_n.$$

On a donc $\boxed{b = r, \quad a = -\frac{r}{\mathrm{K}}}$.

25.2) On peut utiliser par exemple une liste par compréhension.

```
Z = [np.log(Y[i+1]/Y[i]) for i in range(len(Y)-1)]
```

25.3) On peut calculer les coefficients a, b de la droite de régression (par exemple avec Python) puis enfin on calcule les valeurs de r et K puisque $b = a, \mathrm{K} = -\frac{r}{a}$.

On peut aussi estimer a, b en cherchant deux valeurs de y_i, y_j de y de sorte que $y_i \neq y_j$:

$$\left\{\begin{array}{lll} z_i & = & b + a y_i \\ z_j & = & b + a y_j \end{array}\right. \iff a = \frac{z_i - z_j}{y_i - y_j}, \quad b = z_i - a y_i = z_i - \frac{z_i - z_j}{y_i - y_j} y_i.$$