

◦ LA QUALITÉ DE LA RÉDACTION, LA CLARTÉ ET LA PRÉCISION DES RAISONNEMENTS, ENTRERONT POUR UNE PART IMPORTANTE DANS L'APPRÉCIATION DE LA COPIE. LES ABRÉVIATIONS, SIGLES OU PHRASES NOMINALES SONT À PROSCRIRE.

◦ LA NUMÉROTATION DES EXERCICES (ET DES QUESTIONS) DOIT ÊTRE RESPECTÉE ET MISE EN ÉVIDENCE. LES RÉSULTATS DOIVENT ÊTRE ENCADRÉS PROPREMENT.

◦ IL EST IMPORTANT DE NUMÉROTÉRIER CORRECTEMENT LES PAGES DES COPIES QUI SERONT DONNÉES À LA CORRECTION. CHAQUE CANDIDAT EST RESPONSABLE DE LA VÉRIFICATION DE SON SUJET D'ÉPREUVE : PAGINATION ET IMPRESSION DE CHAQUE PAGE.

◦ SI, AU COURS DE L'ÉPREUVE, UN CANDIDAT REPÈRE CE QUI LUI SEMBLE ÊTRE UNE ERREUR D'ÉNONCÉ, IL CONVIENT DE LE SIGNALER SUR LA COPIE ET DE POURSUIVRE LA COMPOSITION EN EXPLIQUANT LES RAISONS DES INITIATIVES QUI ONT ÉTÉ PRISES.

◦ LES CANDIDATS NE DOIVENT AVOIR AUCUNE COMMUNICATION ENTRE EUX OU AVEC L'EXTÉRIEUR DURANT L'ÉPREUVE. AUSSI, L'UTILISATION DES TÉLÉPHONES PORTABLES ET, PLUS LARGEMENT, DE TOUT APPAREIL PERMETTANT DES ÉCHANGES OU LA CONSULTATION D'INFORMATIONS, EST INTERDITE.

◦ LES TÉLÉPHONES SONT ÉTEINTS RANGÉS DANS LES SACS MIS À L'AVANT OU À L'ARRIÈRE DE LA SALLE. LES TROUSSES SONT INTERDITES. LES COPIES SONT FOURNIES, AINSI QUE LES BROUILLONS. LE CRAYON À PAPIER NE SERA PAS CORRIGÉ.

Exercice 1.

Un péage d'autoroute comporte trois guichets numérotés 1, 2, 3. Cinq voitures franchissent le péage en choisissant chacune un guichet indépendamment du choix des autres voitures. X_i désigne le nombre de voitures passant au guichet i ($i \in \{1, 2, 3\}$). $b(n, p)$ désigne la loi binomiale de paramètres n et p .

1. (a) Montrer que pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$, X_i est distribuée selon $b(5, 1/3)$.

X_i compte le nombre de succès dans la répétition cinq fois d'expériences de Bernoulli indépendantes où le succès (passage d'une voiture au guichet i) survient avec probabilité $1/3$. X_i est distribuée selon une loi binomiale de paramètres $n = 5$, $p = 1/3$.

Une justification plus formelle. $I_{i,j} = 1$ si la voiture j passe au guichet i ; 0 sinon. Chaque voiture choisit un des trois guichets avec équiprobabilité et indépendamment du choix des autres voitures, donc pour $i \in \{1, 2, 3\}$ les variables $I_{i,1}, I_{i,2}, \dots, I_{i,5}$ sont indépendantes et distribuées selon une loi de Bernoulli de paramètre $p = 1/3$; et $X_i = \sum_{j=1}^5 I_{i,j}$ est distribuée selon $b(5, 1/3)$.

- (b) Combien de voiture s'attend-on à voir passer au guichet 1 (en moyenne) ?

Le nombre attendu de voitures aux guichet $i \in \{1, 2, 3\}$ est l'espérance de $X_i \sim b(5, 1/3)$: $5/3$.

- (c) Avec quelle probabilité observe-t-on de une à trois voitures au guichet 1 ?

$$\mathbb{P}(1 \leq X_1 \leq 3) = \sum_{k=1}^3 \mathbb{P}(X_1 = k) = \sum_{k=1}^3 \binom{5}{k} (1/3)^k (2/3)^{5-k} = \frac{1}{3^5} [\binom{5}{1} \times 2^4 + \binom{5}{2} \times 2^3 + \binom{5}{3} \times 2^2] = 200/3^5.$$

- (d) Déterminer et interpréter la valeur en 1 de la fonction de répartition de X_1 .

$$\text{En 1, la fonction de répartition de } X_1 \text{ vaut : } \mathbb{P}(X_1 \leq 1) = \sum_{k=0}^1 \mathbb{P}(X_1 = k) = \sum_{k=0}^1 \binom{5}{k} (1/3)^k (2/3)^{5-k} = 112/3^5.$$

2. (a) Que représente la variable aléatoire $Y = X_2 + X_3$?

Y compte le nombre de voitures passant par les guichets 2 ou 3 (somme du nombre de voitures passant par 2 et du nombre de celles passant par 3).

- (b) Justifier : $Y = 5 - X_1$.

Le nombre de voitures passant par 2 ou 3 est aussi le nombre de celles ne passant pas par 1 : $Y = X_2 + X_3 = 5 - X_1$.

- (c) En déduire l'espérance et la variance de Y .

$$\text{Par linéarité de l'espérance : } E(Y) = E(5 - X_1) = 5 - E(X_1) = 10/3.$$

- (d) Quelles sont les valeurs prises par Y ?

De zéro à cinq voitures peuvent ne pas passer par 1 ; ainsi : $Y(\Omega) = \{0, \dots, 5\}$.

- (e) Montrer :

i. si n et k sont deux entiers positifs et $k \leq n$, alors : $\binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$.

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)! \times (n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)! \times k!} = \binom{n}{k}.$$

ii. $\forall k \in \llbracket 0, 5 \rrbracket$, $\mathbb{P}(Y = k) = \binom{5}{k} \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{5-k}$.

$$\text{Si } k \text{ est un entier entre 0 et 5 : } \mathbb{P}(Y = k) = \mathbb{P}(5 - X_1 = k) = \mathbb{P}(X_1 = 5 - k) = \binom{5}{5-k} \left(\frac{1}{3}\right)^{5-k} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \binom{5}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^{5-k} \left(\frac{2}{3}\right)^k.$$

- (f) En déduire la loi de probabilité de Y .

D'après 2.(d) et 2.(e), Y est distribuée selon $b(5, 2/3)$.

3. (a) Calculer $\mathbb{P}_{(X_2=5)}(X_3 = 5)$.

Si cinq voitures passent au guichet 2, aucune ne passe au guichet 3. Ainsi, $\mathbb{P}_{(X_2=5)}(X_3 = 5) = 0$.

- (b) X_2 et X_3 sont-elles indépendantes ?

Puisque X_3 est distribuée selon $b(5, 1/3)$, elle vaut 5 avec probabilité $(1/3)^5$. Ainsi, $\mathbb{P}(X_3 = 5) \neq \mathbb{P}(X_3 = 5 | X_2 = 5)$; X_2 et X_3 ne sont donc pas indépendantes.

(c) Comparer : $V(Y)$ et $V(X_2) + V(X_3)$.

Puisque Y est distribuée selon $b(5, 2/3)$: $V(Y) = 5 \times (2/3) \times (1/3) = 10/9$.

Puisque X_2, X_3 sont distribuées selon $b(5, 1/3)$, elles ont la même variance et : $V(X_2) + V(X_3) = 2 \times V(X_2) = 20/9$.

Ainsi $V(Y) \neq V(X_2) + V(X_3)$.

(d) Retrouver le résultat de 3.(b).

Si X_2 et X_3 étaient indépendantes, la variance de leur somme serait la somme de leurs variances. Or, $V(X_2 + X_3) \neq V(X_2) + V(X_3)$. Donc, par contraposition X_2 et X_3 ne sont pas indépendantes.

4. i, j, k sont trois entiers positifs dont la somme vaut 5.

(a) Supposons : i voitures exactement passent au guichet 1 ($X_1 = i$).

i. Justifier que sous cette hypothèse, X_2 est distribuée selon $b(5 - i, 1/2)$.

Puisque i voitures passent au guichet 1, il reste $5 - i$ voitures à faire passer par 2 ou 3. Or, chaque voiture choisit entre 2 et 3 de façon équiprobable indépendamment du choix des autres voitures. Ainsi, conditionnellement à l'événement : ($X_1 = i$), la variable X_2 compte le nombre de succès (passage d'une voiture par le guichet 2) dans la répétition $5 - i$ fois d'une expérience de Bernoulli de paramètre $1/2$; elle est donc distribuée selon $b(5 - i, 1/2)$.

ii. Justifier : $\mathbb{P}_{(X_1=i)}(X_2 = j) = \binom{5-i}{j} \frac{1}{2^{5-i}}$.

Quand ($X_1 = i$) est réalisé, la variable X_2 est distribuée selon $b(5 - i, 1/2)$ et comme $j = 5 - i - k \in \llbracket 0, 5 - i \rrbracket$:

$$\mathbb{P}_{(X_1=i)}(X_2 = j) = \binom{5-i}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^j \left(\frac{1}{2}\right)^{5-i-j} = \binom{5-i}{j} \times \frac{1}{2^{5-i}}.$$

(b) Montrer en utilisant la formule des probabilités composées : $\mathbb{P}(X_1 = i, X_2 = j, X_3 = k) = \frac{5!}{i!j!k!} \frac{1}{3^5}$.

Avec les questions précédentes on vérifie que $(X_1 = i) \cap (X_2 = j)$ est de probabilité non nulle ; donc la FPC s'applique : $\mathbb{P}(X_1 = i, X_2 = j, X_3 = k) = \mathbb{P}(X_1 = i) \times \mathbb{P}_{(X_1=i)}(X_2 = j, X_3 = k) \times \mathbb{P}_{(X_1=i, X_2=j)}(X_3 = k)$.

Or, $X_1 + X_2 + X_3 = 5$; donc : $\mathbb{P}_{(X_1=i, X_2=j)}(X_3 = k) = 1$ et $\mathbb{P}_{(X_1=i)}(X_2 = j, X_3 = k) = \mathbb{P}_{(X_1=i)}(X_2 = j) = \binom{5-i}{j} \frac{1}{2^{5-i}}$.

Ainsi : $\mathbb{P}(X_1 = i, X_2 = j, X_3 = k) = \binom{5}{i} \left(\frac{1}{3}\right)^i \left(\frac{2}{3}\right)^{5-i} \times \binom{5-i}{j} \frac{1}{2^{5-i}} \times 1 = \frac{5!}{i!(5-i)!} \frac{(5-i)!}{j!(5-i-j)!} \frac{1}{3^5} = \frac{5!}{i!j!k!} \frac{1}{3^5} = \frac{5!}{i!j!k!} \frac{1}{3^5}$.

On assimile maintenant le passage des voitures aux guichets à une 5-liste d'éléments de $\{1, 2, 3\}$: si les deux premières voitures passent au guichet 3, les deux suivantes au guichet 1 et la dernière au guichet 2, on observe la 5-liste : $(3, 3, 1, 1, 2)$; et alors : $X_1 = 2, X_2 = 1, X_3 = 2$. On note $\Omega = \{1, 2, 3\}^5$.

5. (a) Quel est le cardinal de Ω ?

Ω est l'ensemble des 5-listes d'éléments de $\{1, 2, 3\}$. Ainsi, $\text{Card } \Omega = (\text{Card } \{1, 2, 3\})^5 = 3^5$.

(b) Pourquoi peut-on supposer que les singletons composés d'éléments de Ω sont équiprobables ?

Un élément de Ω s'écrit : $\omega = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ et chaque élément v_i a autant de chances de valoir 1, 2 ou 3 indépendamment de la valeur des autres éléments. Ainsi, les 3^5 éléments de Ω peuvent être supposés équiprobables.

(c) Décrire l'événement ($X_1 = 2$), déterminer son cardinal puis sa probabilité.

($X_1 = 2$) est l'ensemble des 5-listes d'éléments de $\{1, 2, 3\}$ comportant exactement deux fois l'élément 1 : $(X_1 = 2) = \{\omega \in \Omega; X_1(\omega) = 2\}$. Dénombrer les éléments ω de Ω réalisant ($X_1 = 2$) revient à choisir :

o l'emplacement des deux 1 dans ω : $\binom{5}{2} = 10$ choix

o le nombre de 2 apparaissant dans ω : $k \in \{0, 1, 2, 3\}$

o l'emplacement des 2 dans ω : $\binom{3}{k}$ choix (deux emplacements sont occupés par les 1)

Ainsi, $\text{Card } (X_1 = 2) = \binom{5}{2} \times \sum_{k=0}^3 k \times \binom{3}{k} = 80$.

Et puisque les éléments de Ω sont équiprobables : $\mathbb{P}(X_1 = 2) = \text{Card } (X_1 = 2) / \text{Card } \Omega = 80/3^5$.

(d) Combien existe-t-il d'éléments de Ω conduisant comme $(3, 3, 1, 1, 2)$ à : $X_1 = 2, X_2 = 1$ et $X_3 = 2$?

Une 5-liste de Ω où 1 apparaît deux fois, 2 une fois et 3 deux fois se caractérise par le choix de : $\binom{5}{2} = 10$ rangs possibles pour les deux 1 et $\binom{3}{1} = 3$ rangs possibles pour l'unique 2 (les autres rangs sont réservés aux 3). Ainsi, il existe 30 éléments de Ω conduisant à $X_1 = 2, X_2 = 1$ et $X_3 = 2$.

(e) Retrouver la formule de 4.(b) donnant $\mathbb{P}(X_1 = i, X_2 = j, X_3 = k)$ pour $(i, j, k) \in \mathbb{N}^3$ et $i + j + k = 5$.

Une 5-liste de Ω où 1 apparaît i fois, 2 apparaît j fois et 3 apparaît k fois se caractérise par le choix de : $\binom{5}{i}$ rangs possibles pour les 1, $\binom{5-i}{j}$ rangs possibles pour les 2 et $\binom{5-i-j}{k}$ rangs possibles pour les 3. La combinaison de ces choix conduit à : $\text{Card } \{\omega \in \Omega; X_1(\omega) = i, X_2(\omega) = j, X_3(\omega) = k\} = \binom{5}{i} \times \binom{5-i}{j} \times \binom{5-i-j}{k} = \frac{5!}{i!(5-i)!} \frac{(5-i)!}{j!(5-i-j)!} \frac{(5-i-j)!}{k!(5-i-j-k)!} = \frac{5!}{i!j!k!}$.

Et puisque les 3^5 éléments de Ω sont équiprobables :

$$\mathbb{P}(X_1 = i, X_2 = j, X_3 = k) = \text{Card } \{\omega \in \Omega; X_1(\omega) = i, X_2(\omega) = j, X_3(\omega) = k\} / \text{Card } \Omega = \frac{5!}{i!j!k!} \frac{1}{3^5}.$$

Exercice 2

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées de taille 3×3 à coefficients réels.

On pose

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad 0_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Partie A

Soit A une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on note $E_1(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : AM = M\}$ et $E_2(A) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : A^2M = AM\}$

1. Montrer que $E_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On montrerait de même que $E_2(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. a) Montrer que $E_1(A) \subset E_2(A)$.
b) On suppose que la matrice A est inversible, montrer que $E_1(A) = E_2(A)$.
c) Montrer que si la matrice $A - I_3$ est inversible alors $E_1(A) = \{0_3\}$

Partie B

Pour tous réels a et b , on définit la matrice

$$P(a, b) = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

On définit par ailleurs l'ensemble des matrices suivant: $F = \{P(a, b), (a, b) \in \mathbb{R}^2\}$.

On pose enfin

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Démontrer que les matrices I_3 et N appartiennent à F , on notera $I_3 = P(a_0, b_0)$, donner a_0 et b_0 .
2. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et que (I_3, N) est une base de F . On notera cette base B .
3. Montrer que N^2 est dans F et donner la représentation matricielle de N^2 dans la base B .
4. Montrer que N est inversible et que son inverse N^{-1} est dans F . Donner la représentation matricielle de N^{-1} dans la base B .
5. a) Montrer que pour tout entier naturel n , il existe deux réels a_{n+1} et b_{n+1} tels que $N^{n+1} = P(a_{n+1}, b_{n+1})$ et que ces réels vérifient les relations de récurrence:

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$$

- b) Quelle est la valeur de a_1 ?
- c) Montrer que la suite (a_n) est récurrente linéaire d'ordre 2.
- d) Déterminer le terme général de la suite (a_n) puis celui de (b_n) .
- e) En déduire, pour tout entier naturel n , la représentation matricielle de N^n dans la base B en fonction de n .
6. Déterminer les deux espaces vectoriels, $E_1(N) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : NM = M\}$ et $E_2(N) = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : N^2M = NM\}$. On donnera une base du sous-espace vectoriel lorsque celui-ci n'est pas restreint à $\{0_3\}$.

Solution de Exercice 2

Partie A

1. • $0_3 \in E_1(A)$ car $A0_3 = 0_3$
• Soient M, N deux matrices de $E_1(A)$ on a donc $AM = M$ et $AN = N$ et soit λ un réel, $A(\lambda M + N) = \lambda AM + AN = \lambda M + N$, on en déduit donc que $\lambda M + N$ est dans $E_1(A)$ et donc que $E_1(A)$ est stable par combinaison linéaire.
On en déduit que $E_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. a) Soit M une matrice de $E_1(A)$, on sait que $AM = M$, on en déduit que $A^2M = A(AM) = AM$ et donc que $M \in E_2(A)$.
On en déduit que $E_1(A) \subset E_2(A)$.
b) Supposons que A est inversible, nous avons prouvé précédemment que $E_1(A) \subset E_2(A)$, réciproquement, soit M une matrice de $E_2(A)$, on a donc $A^2M = AM$ et comme A est inversible, cela implique $A^{-1}A^2M = A^{-1}AM$ et donc $AM = M$ et donc $M \in E_1(A)$, on en déduit que $E_2(A) \subset E_1(A)$. Par double inclusion, on conclut alors que $E_1(A) = E_2(A)$.
c) Supposons que $A - I_3$ est inversible, $M \in E_1(A) \iff AM = M \iff (A - I_3)(M) = 0_3 \iff (A - I_3)^{-1}(A - I_3)(M) = (A - I_3)^{-1}(0_3) \iff M = 0_3$. On en déduit que $E_1(A) = \{0_3\}$.

Partie B

1. $I_3 = P(1, 0)$ ainsi $I_3 \in F$ et $a_0 = 1, b_0 = 0$.
 $N = P(0, 1)$ ainsi $N \in F$.

2. $F \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}, (a, b) \in \mathbb{R}^2 \right\} = \{aI_3 + bN, (a, b) \in \mathbb{R}\} = \text{vect}(I_3, N).$$

On en déduit que F est bien un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Par ailleurs la famille (I_3, N) est libre car les vecteurs ne sont pas colinéaires. Cette famille est donc libre et génératrice, cette famille forme donc une base de F .

3. $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = P(2, 1)$

On en déduit que N^2 est dans F et que la représentation matricielle de N^2 dans la base \mathcal{B} est $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. On sait que $N^2 = 2I_3 + N$ donc $N^2 - N = 2I_3$ c'est-à-dire $\frac{1}{2}(N - I_3)N = I_3$. On en déduit que N^2 est inversible et que

$$N^{-1} = \frac{1}{2}(N - I_3) = P\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right). \text{ La représentation matricielle de } N^{-1} \text{ est } \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

5. a) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la propriété $\mathcal{P}(n)$:

$$N^{n+1} = P(a_{n+1}, b_{n+1}) \text{ avec: } \begin{cases} a_{n+1} = 2b_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \end{cases}$$

Initialisation: Pour $n = 0$, $N = P(0, 1)$ donc $a_1 = 2b_0$ et $b_1 = a_0 + b_0$

Hérédité Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons la propriété $\mathcal{P}(n)$ vraie et montrons alors que $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie:

$$N^{n+2} = N^{n+1} \times N \tag{1}$$

$$= (a_{n+1}I + b_{n+1}N)N \text{ (par HR)} \tag{2}$$

$$= a_{n+1}N + b_{n+1}N^2 \tag{3}$$

$$= a_{n+1}N + b_{n+1}(2I_3 + N) \text{ (par B.3)} \tag{4}$$

$$= (a_{n+1} + b_{n+1})N + 2b_{n+1}I_3 \tag{5}$$

$$= P(2b_{n+1}, a_{n+1} + b_{n+1}) \tag{6}$$

Ainsi $N^{n+2} = P(a_{n+2}, b_{n+2})$ avec $a_{n+2} = 2b_{n+1}$ et $b_{n+2} = a_{n+1} + b_{n+1}$

conclusion: La propriété est initialisée à $n = 0$, elle est héréditaire donc par principe de récurrence, elle est vraie pour tout entier naturel n .

5b) $a_0 = 1$ et d'après la question précédente $a_1 = 2b_0 = 0$

5c) $\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+2} = 2b_{n+1} = 2(a_n + b_n) = 2a_n + a_{n+1}$.

On en déduit que la suite $(a_n)_n \in \mathbb{N}$ est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 avec: $\forall n \in \mathbb{N} \begin{cases} a_0 = 1, a_1 = 0 \\ a_{n+2} - a_{n+1} - 2a_n = 0 \end{cases}$

d) L'équation caractéristique associée est $r^2 - r - 2 = 0$. Les deux racines réelles sont 2 ou -1 , on en déduit:

$\exists (a, b) \in \mathbb{R}^2, \forall n \in \mathbb{N}, a_n = a(-1)^n + b2^n$. Déterminons a et b :

$$\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = \frac{1}{3} \\ a = \frac{2}{3} \end{cases}$$

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{2}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}2^n$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n = \frac{1}{2}a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}(-1)^{n+1} + \frac{1}{3}2^{n+1}\right) = \frac{1}{3}(-1)^{n+1} + \frac{1}{3}2^n.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, b_n = \frac{1}{3}(-1)^{n+1} + \frac{1}{3}2^n.$$

e) D'après la question précédente, pour tout entier naturel n, N^n est dans F et sa représentation matricielle dans la base

$$\mathcal{B} \text{ est } \begin{pmatrix} \frac{2}{3}(-1)^n + \frac{1}{3}2^n \\ \frac{1}{3}(-1)^{n+1} + \frac{1}{3}2^n \end{pmatrix}$$

6. Nous avons démontré dans la question 4. que N est inversible donc d'après la question A2b), $E_1(N) = E_2(N)$ par ailleurs, toujours d'après cette question 4. $N - I_3$ est également inversible, son inverse est $\frac{1}{2}N$, on déduit alors de la question A2c)

que $E_1(N) = E_2(N) = \{0_3\}$