

# Programme de colles

## du 25 au 29/5/2026

- Cette semaine : 1 question de cours dans la liste.
- Sur les applications linéaires : très peu d'exercices de TD ont été faits, et le TD de lundi saute (jour férié). Merci de poser des exercices de difficulté très modeste (capacités attendues : montrer qu'une application est linéaire, trouver une base du noyau et de l'image le cas échéant, calculer une matrice et savoir l'exploiter).
- N'est **pas encore au programme de colle** : la dernière sous-section du cours (matrice d'une composée et conséquence sur l'inversibilité, matrice d'une puissance, et matrice d'une image  $u(x)$ ). Je la traiterai en cours mercredi prochain.

### 1 [MATHS] APPLICATIONS LINÉAIRES



#### ! Attention

- Rappels : les notions de sommes (normale et directe) ne sont pas au programme de BCPST. De fait, les notions associées (projecteurs, symétries, etc.) ne le sont pas non plus.
- Les formules de changement de base ne sont pas au programme de 1ère année.
- L'équivalence entre injectivité et surjectivité lorsque les dimensions sont égales n'est pas marquée explicitement dans le programme; les étudiants doivent donc le montrer à l'aide du théorème du rang au cas par cas.

- **Généralités.** Définition d'application linéaire, applications linéaires usuelles (homothéties notamment), opérations, propriétés. Puissances d'un endomorphisme et nilpotence, formule du binôme. Image et noyau, lien avec l'injectivité et la surjectivité. Famille génératrice de l'image à l'aide d'une famille génératrice de l'espace de départ. Isomorphisme, automorphisme, notation groupe linéaire. Cas de la dimension finie : nature d'une famille image, définir une application linéaire sur une base définit l'application partout, notion de rang (théorème du rang, lien entre les notions de rang...).

- **Représentation matricielle.** Définition, propriété du symbole « Mat » (linéarité, isomorphisme). Application linéaire canoniquement associée à une matrice, et réciproque. Noyau et image d'une matrice.

### QUESTIONS & EXEMPLES IMPORTANTS DE COURS

1. Définition d'une application linéaire d'un espace vectoriel  $E$  dans un espace vectoriel  $F$ . Montrer que l'application moyenne  $M : \begin{cases} \mathbb{K}^n & \longrightarrow \mathbb{K} \\ (x_1, \dots, x_n) & \longrightarrow \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \end{cases}$  est une forme linéaire sur  $\mathbb{K}^n$ .
2. Soit  $V$  un sous-espace vectoriel de  $E$  et  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ , où  $E, F$  sont deux espaces vectoriels. Définir l'image directe  $u(V)$ , puis montrer que  $u(V)$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ .
3. Définition d'une application linéaire  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  avec  $E, F$  deux espaces vectoriels. Écrire la définition du noyau de  $u$ , puis montrer que  $\text{Ker } u$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
4. Définir le rang d'une application linéaire  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ , si  $\text{Im}(u)$  est de dimension finie. Énoncer le théorème du rang. Justifier l'inégalité  $\text{Rg } u \leq \min(n, p)$  si  $\dim E = n \in \mathbb{N}$  et  $\dim F = p \in \mathbb{N}$  lorsque  $E, F$  sont de dimension finie.
5. Définir le rang d'une application linéaire  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ , si  $\text{Im}(u)$  est de dimension finie. Énoncer le théorème du rang. Justifier l'équivalence :  $u$  injective  $\iff u$  surjective, sous une certaine hypothèse à rappeler.
6. Déterminer l'application linéaire  $u$  (*expression analytique!*) (de  $\mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}^p$  avec  $n, p$  à préciser) canoniquement associée à  $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ .

À venir : les développements limités.