Programme de colles

du 1 au 5/6/2026

- Cette semaine : 1 question de cours dans la liste. Sur les développements limités, uniquement des questions de cours.

1 [MATHS] APPLICATIONS LINÉAIRES

Attention

- Rappels : les notions de sommes (normale et directe) ne sont pas au programme de BCPST. De fait, les notions associées (projecteurs, symétries, *etc.*) ne le sont pas non plus.
- Les formules de changement de base ne sont pas au programme de 1ère année.
- L'équivalence entre injectivité et surjectivité lorsque les dimensions sont égales n'est pas marquée explicitement dans le programme ; les étudiants doivent donc le montrer à l'aide du théorème du rang au cas par cas.

- **Généralités.** Définition d'application linéaire, applications linéaires usuelles (homothéties notamment), opérations, propriétés. Puissances d'un endomorphisme et nilpotence, formule du binôme. Image et noyau, lien avec l'injectivité et la surjectivité. Famille génératrice de l'image à l'aide d'une famille génératrice de l'espace de départ. Isomorphisme, automorphisme, notation groupe linéaire. Cas de la dimension finie : nature d'une famille image, définir une application linéaire sur une base définit l'application partout, notion de rang (théorème du rang, lien entre les notions de rang...).
- **Représentation matricielle.** Définition, propriété du symbole « Mat » (linéarité, isomorphisme). Application linéaire canoniquement associé à une matrice, et réciproque. Noyau et image d'une matrice. Opérations : matrice d'une combinaison linéaire, d'une composée, d'un inverse.

QUESTIONS & EXEMPLES IMPORTANTS DE COURS

1. Soit V un sous-espace vectoriel de E et $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$, où E,F sont deux espaces vectoriels. Définir l'image directe $u(\mathrm{V})$, puis montrer que $u(\mathrm{V})$ est un sous-espace vectoriel de F.
2. Définition d'une application linéaire $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$ avec E,F deux espaces vectoriels. Écrire la définition du noyau de u, puis montrer que $\operatorname{Ker} u$ est un sous-espace vectoriel de E.
3. Définir le rang d'une application linéaire $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$, si $\operatorname{Im}(u)$ est de dimension finie. Énoncer le théorème du rang. Justifier l'inégalité $\operatorname{Rg} u \leqslant \min(n,p)$ si $\dim \mathrm{E} = n \in \mathbb{N}$ et $\dim \mathrm{F} = p \in \mathbb{N}$ lorsque E,F sont de dimension finie.
4. Définir le rang d'une application linéaire $u \in \mathscr{L}(\mathrm{E},\mathrm{F})$, si $\operatorname{Im}(u)$ est de dimension finie. Énoncer le théorème du rang. Justifier l'équivalence :
$$u \text{ injective} \iff u \text{ surjective}, \quad \text{sous une certaine hypothèse à rappeler.}$$
5. Déterminer l'application linéaire u *(expression analytique!)* (de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^p$ avec n,p à préciser) canoniquement associée à $\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
6. Donner le lien entre la relation « petit o » et l'équivalent $\sim$ pour les fonctions. Rappeler les équivalents usuels sur les fonctions exp et cos. En déduire un $\mathrm{DL}_1(0)$ de exp et un $\mathrm{DL}_2(0)$ de cos.
7. Rappeler les développements limités de cos, sin du cours. Montrer, selon deux méthodes, que (cos, sin) est libre dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. *(1ère : celle du chapitre sur les espaces vectoriels, en évaluant en plusieurs x — 2ème : en utilisant les $\mathrm{DL}_1(0)$ de cos et sin et la propriété d'unicité du développement limité)*
8. Citer la formule de TAYLOR-YOUNG. L'appliquer pour déterminer le $\mathrm{DL}_n(0)$ de exp, et le $\mathrm{DL}_2(1)$ de exp.

À venir : les oraux blancs.