I Analyse-20 minutes

1 Exercice 1

1. On démontre par récurrence la propriété $\mathcal{P}(n) : 0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$.

   - <u>Initialisation :</u> comme $u_0 = 1$, on a bien $0 \leqslant u_0 \leqslant \dfrac{1}{0+1}$ et $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
   - <u>Hérédité :</u> soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{n+1}$. En multipliant par $\dfrac{n+1}{n+3} > 0$ dans cette inégalité, il vient :

   $$0 \leqslant \frac{n+1}{n+3} u_n \leqslant \frac{n+1}{n+3} \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n+3} \quad \text{soit} \quad 0 \leqslant u_{n+1} \leqslant \frac{1}{n+3}$$

   Il reste à remarquer que $\dfrac{1}{n+3} \leqslant \dfrac{1}{n+2}$ pour en déduire que $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant \dfrac{1}{n+2}$ et donc que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

   On a bien démontré par récurrence que

   $$\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n+1}}$$

2. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$, on déduit du théorème des gendarmes que $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge et } \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0}$.

   Remarque : en fait, pour tout $n \geqslant 0$, $u_n = \dfrac{2}{(n+1)(n+2)}$, ce que l'on aurait pu vérifier par récurrence.

2 Exercice 2

1. On commence par rappeler le $DL_2(0)$ de exp :

   $$e^t \underset{t\to 0}{=} 1 + t + \frac{t^2}{2!} + o\left(t^2\right)$$

   En remplaçant t par $-x$, on obtient le $DL_2(0)$ suivant :

   $$e^{-x} \underset{x\to 0}{=} 1 - x + \frac{(-x)^2}{2!} + o\left((-x)^2\right) \underset{x\to 0}{=} 1 - x + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)$$

   Enfin, en multipliant par x, on gagne un ordre et on obtient le $DL_3(0)$ demandé :

   $$\boxed{f(x) = xe^{-x} \underset{x\to 0}{=} x - x^2 + \frac{x^3}{2} + o\left(x^3\right)}$$

2. f est continue sur $[0\,;1]$, donc $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t$ et on la calcule par IPP :

   $$\int_0^1 \underbrace{t}_{u(t)} \underbrace{e^{-t}}_{v'(t)}\ \mathrm{d}t = \Big[\underbrace{t}_{u(t)} \underbrace{(-e^{-t})}_{v(t)}\Big]_0^1 - \int_0^1 \underbrace{1}_{u'(t)} \times \underbrace{(-e^{-t})}_{v(t)}\ \mathrm{d}t \qquad (u \text{ et } v \text{ étant bien de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur } [0,1])$$

   $$= -e^{-1} + 0 + \int_0^1 e^{-t}\ \mathrm{d}t = -e^{-1} + \Big[-e^{-t}\Big]_0^1 = -e^{-1} - e^{-1} + 1$$

   Ainsi,

   $$\boxed{\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t = \int_0^1 te^{-t}\ \mathrm{d}t = -2e^{-1} + 1 = 1 - \frac{2}{e}}$$

3 Exercice 3

1. Par somme on a immédiatement $\boxed{\lim\limits_{x\to 0} g(x) = +\infty}$.

   Pour la limite en $+\infty$, on factorise pour lever la forme indéterminée :

$$g(x) = x - \ln(x) = x\left(1 - \frac{\ln(x)}{x}\right)$$

   Or $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ par croissances comparées, puis $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{\ln(x)}{x} = 1$.
   Par produit, $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty}$.

2. La fonction g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall\, x \in]0, +\infty[\,, \quad g'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$$

   Pour $x \in]0, +\infty[$, le signe de $g'(x)$ est celui de $x - 1$, d'où le tableau suivant :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		-	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$

II Algèbre-20 minutes

1 Exercice 1

1. La base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$ est $\mathcal{B} = (1, X, X^2, \ldots, X^n)$ et $\dim(\mathbb{R}_n[X]) = \mathrm{Card}(\mathcal{B}) = n + 1$
2.
   - f est bien une application de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
   - Soient $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned} f(\lambda M + N) &= A(\lambda M + N) \\ &= \lambda AM + AN && \text{par distributivité du produit matriciel} \\ &= \lambda f(M) + f(N) \end{aligned}$$

     Ainsi f est bien linéaire.

   f est donc bien un endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3.
   - F est un sous-ensemble de $\mathbb{R}_n[X]$.
   - Le polynôme nul appartient à F.
   - Soient $P \in F$, $Q \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a $(\lambda P + Q)' = \lambda P' + Q'$ par linéarité de la dérivation et donc $(\lambda P + Q)'(1) = \lambda P'(1) + Q'(1) = 0$ car P et Q sont dans F.
     Ainsi $\lambda P + Q \in F$ et F est donc stable par combinaisons linéaires.

   F est donc bien un SEV de $\mathbb{R}_n[X]$.

2 Exercice 2

1. La base canonique de $\mathbb{R}^3$ est $\mathcal{B}_c = \left(\underbrace{(1,0,0)}_{\vec{e}_1}, \underbrace{(0,1,0)}_{\vec{e}_1}, \underbrace{(0,0,1)}_{\vec{e}_1}\right)$ et on a :
   - $f(\vec{e}_1) = (0, 1, 1) = 0 \times \vec{e}_1 + 1 \times \vec{e}_2 + 1 \times \vec{e}_3$,
   - $f(\vec{e}_2) = (2, 0, 0) = 2 \times \vec{e}_1 + 0 \times \vec{e}_2 + 0 \times \vec{e}_3$,
   - $f(\vec{e}_3) = (2, 0, 0) = 2 \times \vec{e}_1 + 0 \times \vec{e}_2 + 0 \times \vec{e}_3$.

On déduit alors que :

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_c}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(\vec{e}_1) & f(\vec{e}_2) & f(\vec{e}_3) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \to \vec{e}_1 \\ \to \vec{e}_2 \\ \to \vec{e}_3 \end{array}$$

2. • **Méthode 1 :** en utilisant l'expression cartésienne f.

(a) Soit $\vec{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \vec{u} \in \mathrm{Ker}(f) &\Leftrightarrow f(\vec{u}) = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} 2y + 2z = 0 \\ x = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = -z \\ x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathrm{Ker}(f) = \{(0, -z, z),\ z \in \mathbb{R}\} = \mathrm{Vect}(\underbrace{(0, -1, 1)}_{\vec{v}})$ et $(\vec{v})$ est donc une famille génératrice de $\mathrm{Ker}(f)$. Elle est de plus libre car constituée d'un unique vecteur non-nul, c'est donc une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$.

(b) D'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3)$, on en déduit que $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$.

(c) $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ donc $(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), f(\vec{e}_3))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$.
On remarque que $f(\vec{e}_2) = f(\vec{e}_3)$, donc $(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2))$ est une autre famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$ dont le cardinal est égal à la dimension de $\mathrm{Im}(f)$, c'est donc une base de $\mathrm{Im}(f)$.

• **Méthode 2 :** en utilisant l'écriture matricielle de f.

(a) $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ donc $(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2), f(\vec{e}_3))$ est une famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$.
On remarque que $f(\vec{e}_2) = f(\vec{e}_3)$, $(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2))$ est donc une autre famille génératrice de $\mathrm{Im}(f)$.
On remarque de plus que $f(\vec{e}_1)$ et $f(\vec{e}_2)$ sont non-nuls et non-colinéaires, donc $(f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2))$ est une famille libre et c'est donc une base de $\mathrm{Im}(f)$ et donc $\dim(\mathrm{Im}(f)) = 2$.
Remarque : plutôt que d'invoquer la non-colinéarité de $f(\vec{e}_1)$ et $f(\vec{e}_2)$, on pouvait aussi calculer le rang de A, qui vaut 2, qui est aussi égal à la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ *et conclure comme au* $3^{\text{ème}}$ *point de la première méthode.*

(b) D'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Im}(f)) + \dim(\mathrm{Ker}(f)) = \dim(\mathbb{R}^3)$, on en déduit que $\dim(\mathrm{Ker}(f)) = 1$.

(c) On a vu précédemment que $f(\vec{e}_2) = f(\vec{e}_3)$, soit encore que $f(\vec{e}_2) - f(\vec{e}_3) = \vec{0}$, soit encore que $f(\underbrace{\vec{e}_2 - \vec{e}_3}_{\vec{w} = -\vec{v}}) = \vec{0}$ par linéarité de f. Ainsi $\vec{w} \in \mathrm{Ker}(f)$ et $(\vec{w})$ est donc une base de $\mathrm{Ker}(f)$ puisqu'elle est libre ($\vec{w} \neq \vec{0}$) est de cardinal égal à la dimension de $\mathrm{Ker}(f)$.

3. (a) On note $\mathcal{B} = \left(\underbrace{(0,1,-1)}_{\vec{u}_1}, \underbrace{(2,1,1)}_{\vec{u}_2}, \underbrace{(2,-1,-1)}_{\vec{u}_3}\right)$ et soit trois réels λ_1, λ_2 et λ_3.

On a les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\lambda_1\vec{u}_1 + \lambda_2\vec{u}_2 + \lambda_3\vec{u}_3 = \vec{0} &\Leftrightarrow (0, \lambda_1, -\lambda_1) + (2\lambda_2, \lambda_2, \lambda_2) + (2\lambda_3, -\lambda_3, -\lambda_3) = \vec{0} \\
&\Leftrightarrow (2\lambda_2 + 2\lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3, -\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3) = (0,0,0) \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} 2\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 &= 0 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 &= 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 &= 0 \quad L_1 \leftarrow L_2 \\ -\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 &= 0 \quad L_2 \leftarrow L_3 \\ \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \quad L_3 \leftarrow \frac{1}{2}L_1 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 &= 0 \quad L_2 \leftarrow \frac{1}{2}(L_2 + L_1) \\ \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_2 - \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_3 &= 0 \quad L_3 \leftarrow \frac{1}{2}(L_3 - L_2) \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0
\end{aligned}$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ est l'unique solution, $\mathcal{B}$ est donc une famille libre de $\mathbb{R}^3$.
De plus $\text{Card}(\mathcal{B}) = 3 = \dim(\mathbb{R}^3)$ donc $\mathcal{B}$ est bien une base de $\mathbb{R}^3$.

(b) Le calcul donne $\begin{cases} f(\vec{u}_1) = (0,0,0) = 0 \times \vec{u}_1 + 0 \times \vec{u}_2 + 0 \times \vec{u}_3 \\ f(\vec{u}_2) = (4,2,2) = 0 \times \vec{u}_1 + 2 \times \vec{u}_2 + 0 \times \vec{u}_3 \\ f(\vec{u}_3) = (-4,2,2) = 0 \times \vec{u}_1 + 0 \times \vec{u}_2 - 2 \times \vec{u}_3 \end{cases}$

On en déduit que :

$$B = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} f(\vec{u}_1) & f(\vec{u}_2) & f(\vec{u}_3) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \to \vec{u}_1 \\ \to \vec{u}_2 \\ \to \vec{u}_3 \end{array}$$

III Probabilités-20 minutes

1 Exercice 1

1. L'événement A_n se réalise si et seulement si on obtient une autre face que '6' lors des $n-1$ premiers lancers, puis un '6' au lancer n :

$$A_n = \overline{S_1} \cap \ldots \cap \overline{S_{n-1}} \cap S_n$$

Les événements S_i étant mutuellement indépendants, on a

$$P(A_n) = P\left(\overline{S_1} \cap \ldots \cap \overline{S_{n-1}} \cap S_n\right) = P\left(\overline{S_1}\right) \times \ldots \times P\left(\overline{S_{n-1}}\right) P(S_n)$$

Or

$$P\left(\overline{S_1}\right) = \ldots = P\left(\overline{S_{n-1}}\right) = \frac{5}{6} \quad \text{et} \quad P(S_n) = \frac{1}{6}$$

donc

$$\boxed{P(A_n) = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}}$$

2. A chaque lancer, on obtient '6' avec la probabilité $p = \frac{1}{6}$. On répète n fois cette expérience de manière indépendante et on s'intéresse au nombre de '6' obtenus.
   La variable aléatoire $\boxed{X \text{ suit donc une loi binomiale de paramètres } p = \dfrac{1}{6} \text{ et } n}$:
$$\boxed{X(\Omega) = [\![0, n]\!] \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![0, n]\!]\,,\ P(X = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}}$$
   On rappelle que $\boxed{E(X) = np = \dfrac{n}{6} \text{ et de } V(X) = np(1-p) = \dfrac{5n}{36}}$.
3. On applique bien sûr la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $([X = k])_{k\in[\![0,n]\!]}$:
$$P(B) = \sum_{k=0}^{n} P(X = k)P_{[X=k]}(B) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{6}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}\left(\frac{1}{3}\right)^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{1}{18}\right)^k\left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}$$
   On utilise alors la formule du binôme de Newton pour terminer le calcul :
$$\boxed{P(B) = \left(\frac{1}{18} + \frac{5}{6}\right)^n = \left(\frac{8}{9}\right)^n}$$

2 Exercice 2

1. On a facilement $\boxed{P(R_1) = \frac{1}{5}}$ puisqu'il y a 1 jeton rouge pour 5 jetons au total. Ensuite,
$$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1)\,P_{R_1}(R_2) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \quad \text{soit} \quad \boxed{P(R_1 \cap R_2) = \frac{1}{25}}$$
   En effet, le jeton rouge étant remis, si R_1 est réalisé, l'urne comporte encore 1 jeton rouge pour 5 jetons au total au moment d'effectuer le deuxième tirage.
   Enfin,
$$P\left(\overline{R_1} \cap \overline{R_2}\right) = P\left(\overline{R_1}\right)P_{\overline{R_1}}\left(\overline{R_2}\right) = \frac{4}{5} \times \frac{3}{4} \quad \text{soit} \quad \boxed{P\left(\overline{R_1} \cap \overline{R_2}\right) = \frac{3}{5}}$$
2. On applique la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $\left(R_1, \overline{R_1}\right)$:
$$P(R_2) = P(R_1)\,P_{R_1}(R_2) + P\left(\overline{R_1}\right)P_{\overline{R_1}}(R_2) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} \quad \text{soit} \quad \boxed{P(R_2) = \frac{6}{25}}$$
3. Les événements R_1 et R_2 ne sont pas indépendants car $P_{R_1}(R_2) \neq P(R_2)$ comme on l'a vu.
   Les événements R_1 et R_2 ne sont pas incompatibles non plus car $R_1 \cap R_2 \neq \emptyset$.
4. Compte-tenu des modalités de tirages, on peut piocher $0, 1$ ou 2 jetons rouges au cours des deux premiers tirages : on a donc $Y(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.
   Ensuite, on remarque que
$$[Y = 0] = \overline{R_1} \cap \overline{R_2} \quad \text{et} \quad [Y = 2] = R_1 \cap R_2$$
   On déduit de la question 1 que
$$P(Y = 0) = \frac{3}{5} \quad \text{et} \quad P(Y = 2) = \frac{1}{25}$$
   Enfin, comme la famille $([Y = 0], [Y = 1], [Y = 2])$ est un système complet d'événements, on a
$$P(Y = 1) = 1 - P(Y = 0) - P(Y = 2) = 1 - \frac{3}{5} - \frac{1}{25} = \frac{9}{25}$$
   Finalement, la loi de X est donnée par
$$\boxed{Y(\Omega) = \{0, 1, 2\} \quad \text{et} \quad P(Y = 0) = \frac{3}{5}\,,\ P(Y = 1) = \frac{9}{25}\,,\ P(Y = 2) = \frac{1}{25}}$$

Remarque : On aurait pu aussi calculer $P(Y=1)$ directement, mais c'était plus long :

$$[Y=1] = \left(R_1 \cap \overline{R_2}\right) \cup \left(\overline{R_1} \cap R_2\right)$$

puis, par incompatibilité des événements $R_1 \cap \overline{R_2}$ et $\overline{R_1} \cap R_2$, on a

$$P(Y=1) = P\left(R_1 \cap \overline{R_2}\right) + P\left(\overline{R_1} \cap R_2\right) = P\left(R_1\right) P_{R_1}\left(\overline{R_2}\right) + P\left(\overline{R_1}\right) P_{\overline{R_1}}\left(R_2\right) = \ldots = \frac{9}{25}$$

IV Informatique-20 minutes

1 Exercice 1

```python
import numpy as np          # récupération de la bibliothèque numpy sous l'alias np

def somme(n):
    '''Renvoie la somme des k*cos(k) pour k de 0 à n'''
    S = 0                   # on initialise S à 0
    for k in range(0,n+1):  # pour k de 0 à n
        S = S+k*np.cos(k)       # on ajoute k*cos(k) à S
    return S
```

2 Exercice 2

1.

```python
def min_list(L):
    '''Renvoie la valeur du plus petit élément de la liste non vide L'''
    n = len(L)          # n est la longueur de L
    m = L[0]            # on initialise m avec le premier élément de L
    for i in range(1,n):# on parcourt tous les indices suivants
        if L[i]<m:          # si l'élément est plus petit que m
            m = L[i]            # m prend sa valeur
    return m

```

2.

```python
def ind_min_list(L):
    '''Renvoie l'indice de la première occurrence du plus petit élément de la liste non
     ↪ vide L'''
    n = len(L)          # n est la longueur de L
    m = L[0]            # on initialise m avec le premier élément de L
    ind = 0             # ind est l'indice de m dans L
    for i in range(1,n):# on parcourt les indices suivants
        if m>L[i]:          # si l'élément est strictement plus petit que m
            m = L[i]            # m prend sa valeur
            ind = i             # on met à jour la valeur de son indice
    return ind
```

3 Exercice 3

1.

```python
import numpy as np          # récupération de la bibliothèque numpy sous l'alias np

def terme_u(n):
    '''Renvoie la valeur de u_n'''
    u = 1                   # u contient la valeur de u_0
    for i in range(1,n+1):  # pour i de 1 à n
        u = np.sin(u)/2         # on calcule u_i grâce à la relation de récurrence
    return u
```

On donne également une version récursive

```
def terme_u_rec(n):
    '''Renvoie la valeur de u_n, version récursive'''
    if n==0:        # dans ce cas on renvoie directement la valeur de u_0
        return 1
    else:           # sinon on utilise la relation de récurrence
        return np.sin(terme_u_rec(n-1))/2
```

2.

```
def liste_u(n):
    '''Renvoie la liste [u_0,..,u_n]'''
    L = [1]                 # la liste L ne contient que u_0
    for i in range(1,n+1):  # pour i de 1 à n
        u = np.sin(L[i-1])/2    # on calcule u_i grâce à la relation de récurrence
        L.append(u)             # et on l'ajoute à L
    return L
```

3.

```
def vitesse_u(e):
    '''Renvoie le premier indice n pour lequel |u_n|<e'''
    u = 1                   # u contient la valeur de u_0
    n = 0                   # n est l'indice courant
    while np.abs(u)>=e:     # tant que l'écart est supérieur ou égal à e
        u = np.sin(u)/2         # on calcule le terme suivant
        n = n+1                 # et on augmente l'indice
    return n
```