

*Avertissement : Il est rappelé qu'une copie doit être rendue lisible, compréhensible et propre ; l'objectif étant de montrer que l'on a compris ou trouvé, et de bien se faire comprendre du correcteur. La note finale tiendra compte de la qualité de la rédaction.*

## I Analyse-20 minutes

### 1 Exercice 1

On définit la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 0, \quad u_{n+1} = \frac{n+1}{n+3} u_n$$

1. Montrer par récurrence que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$$

2. En déduire la nature de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et calculer sa limite.

### 2 Exercice 2

Pour tout  $x > 0$ , on pose  $f(x) = xe^{-x}$ .

1. Déterminer le développement limité de  $f$  à l'ordre 3 au voisinage de 0.
2. A l'aide d'une intégration par parties, calculer la valeur de

$$I = \int_0^1 f(t) dt$$

### 3 Exercice 3

On définit la fonction  $g$  par :

$$\forall x > 0, \quad g(x) = x - \ln(x)$$

1. Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ .
2. Dresser le tableau des variations de  $g$  sur  $]0, +\infty[$ .

## II Algèbre-20 minutes

### 1 Exercice 1

Dans tout l'exercice,  $n$  désignera un entier naturel non nul. Les trois questions sont indépendantes.

1. Donner la base canonique et la dimension de  $\mathbb{R}_n[X]$ .
2. Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ , montrer que  $f : M \mapsto AM$  est un endomorphisme de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ .
3. Montrer  $F = \{P \in \mathbb{R}_n[X], P'(1) = 0\}$  est un SEV de  $\mathbb{R}_n[X]$ .

### 2 Exercice 2

Soit  $f : \begin{cases} \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \longmapsto (2y + 2z, x, x) \end{cases}$ . On admet que  $f$  est un endomorphisme de  $\mathbb{R}^3$ .

1. Donner la représentation matricielle  $A$  de  $f$  dans la base canonique  $\mathcal{B}_c$  de  $\mathbb{R}^3$ .
2. Déterminer une base de  $\text{Im}(f)$  et de  $\text{Ker}(f)$ .
3. Soit  $\mathcal{B} = ((0, 1, -1), (2, 1, 1), (2, -1, -1))$ .
  - (a) Montrer que  $\mathcal{B}$  est une base de  $\mathbb{R}^3$ .
  - (b) Donner la représentation matricielle  $B$  de  $f$  dans  $\mathcal{B}$ .

### III Probabilités-20 minutes

#### 1 Exercice 1

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ . On lance  $n$  fois un dé ordinaire à six faces.

On note  $S_i$  l'événement "on obtient '6' lors du  $i^{\text{ème}}$  lancer".

- On note  $A_n$  l'événement "on obtient le premier '6' au  $n^{\text{ème}}$  lancer".  
Écrire l'événement  $A_n$  à l'aide des événements  $S_i$ . En déduire la valeur de  $P(A_n)$ .
- Soit  $X$  la variable aléatoire égale au nombre de '6' obtenus au cours de ces  $n$  lancers.  
Reconnaître la loi de  $X$  (en justifiant) et l'expliciter. Rappeler la valeur de  $E(X)$  et de  $V(X)$ .
- Soit  $B$  un événement. On suppose que, pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,  $P_{[X=k]}(B) = \left(\frac{1}{3}\right)^k$ .  
Calculer  $P(B)$ .

#### 2 Exercice 2

Une urne contient initialement un jeton rouge et quatre jetons blancs. On y effectue une succession de tirages d'un jeton à la fois selon la règle suivante :

- si le jeton tiré est rouge, on le remet dans l'urne.
- si le jeton tiré est blanc, on ne le remet pas.

On note  $R_i$  l'événement "on a pioché un jeton rouge lors du  $i^{\text{ème}}$  tirage". On notera également  $Y$  la variable aléatoire égale au nombre de jetons rouges piochés lors des deux premiers tirages.

- Calculer  $P(R_1)$ ,  $P(R_1 \cap R_2)$  et  $P(\overline{R_1} \cap \overline{R_2})$ .
- Calculer  $P(R_2)$ .
- Les événements  $R_1$  et  $R_2$  sont-ils indépendants, incompatibles? Justifier les réponses.
- Déterminer la loi de  $Y$ , en commençant par donner son univers-image.

### IV Informatique-20 minutes

#### 1 Exercice 1

Écrire une fonction `somme(n)` qui renvoie la valeur de  $\sum_{k=0}^n k \cos(k)$ .

#### 2 Exercice 2

Soit  $L$  une liste non vide.

- Écrire une fonction `min_list(L)` qui renvoie la valeur du plus petit élément de  $L$ .
- Écrire une fonction `ind_min_list(L)` qui renvoie l'indice de la première occurrence du plus petit élément de  $L$ .

#### 3 Exercice 3

Soit  $(u_n)$  la suite définie par  $\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{\sin(u_n)}{2} \end{cases}$ . On admet que  $(u_n)$  converge vers 0.

- Écrire une fonction `terme_u(n)` qui renvoie la valeur  $u_n$ .
- Écrire une fonction `list_u(n)` qui renvoie la liste de tous les termes de  $u_0$  à  $u_n$ .
- Écrire une fonction `vitesse_u(e)` qui renvoie le premier indice  $n$  pour lequel  $|u_n| < e$ .