
TD 1 : FONCTIONS USUELLES

Voici un panel d'exercices à chercher avant la rentrée. Les notions abordées ont sensées être maîtrisées en classe de terminale.

1. DOMAINE DE DÉFINITION, DÉRIVATION

Exercice 1. Pour chacune des fonctions suivantes, déterminer le domaine de définition de la fonction définie par l'expression considérée, déterminer le domaine de dérivabilité de la fonction f , puis calculer f' .

- | | |
|---|---|
| (a) $f(x) = 4x^2 - 3x + 1 + \frac{3}{x}$ | (l) $f(x) = \ln(e^{2x} - 1)$ |
| (b) $f(x) = (x^3 - x)(x - 9)$ | (m) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-3}}$ |
| (c) $f(x) = (2x + \frac{1}{x})(3x - 1)$ | (n) $f(x) = (1 - x)\sqrt{x + 1}$ |
| (d) $f(x) = \frac{2x+1}{3x-1}$ | (o) $f(x) = \frac{1}{x^2+x-2}$ |
| (e) $f(x) = \frac{x}{x+\sqrt{x}}$ | (p) $f(x) = x\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ |
| (f) $f(x) = \left(\frac{1}{1+x}\right)^3$ | (q) $f(x) = \frac{-3x^2+4x-1}{x^2+2x+5}$ |
| (g) $f(x) = \frac{1}{2-\cos(x)}$ | (r) $f(x) = \ln\left(\frac{2x-1}{x-3}\right)$ |
| (h) $f(x) = (x^4 - x^2 + 5)^4$ | (s) $f(x) = \frac{4\cos^2(x)-3}{2\cos(x)}$ |
| (i) $f(x) = (\ln(x))^3$ | (t) $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ |
| (j) $f(x) = (x^2 + x + 1)e^x$ | |
| (k) $f(x) = \sqrt{(\ln(x))^2 + 1}$ | |

2. CALCUL DE PRIMITIVES

Exercice 2. Par reconnaissance de dérivées, déterminez une primitive des fonctions suivantes :

- | | | |
|-------------------------------|------------------------------------|--|
| (1) $2x^{27} + x^3 + 4x + 5,$ | (7) $\frac{2t}{\sqrt{1+t^2}},$ | (12) $\cos(5x + 3),$ |
| (2) $\sin(2t + \pi/5),$ | (8) $\frac{\sin(x)}{\cos(x)^4},$ | (13) $x \cos(3x^2),$ |
| (3) $1 - 2e^t,$ | (9) $\frac{9x^2+1}{(3x^3+x+1)^3},$ | (14) $\frac{1}{x^n}, (n \in \mathbb{N}^*)$ |
| (4) $\frac{3x^2}{4x^3+1},$ | (10) $x^2 \exp(x^3),$ | (15) $\tan(x),$ |
| (5) $\frac{e^x+1}{e^x+x},$ | (11) $\frac{e^x}{e^x+4},$ | (16) $\frac{1}{\tan(x)}$ |
| (6) $\frac{1}{\sqrt{3x+1}},$ | | |

Exercice 3. Déterminer la primitive F de f sur I telle que $F(x_0) = y_0$

- (1) $I = \mathbb{R}, f(x) = 1 - x + x^2 - x^3, x_0 = 1, y_0 = 0,$
 (2) $I = \mathbb{R}, f(x) = \cos(3x), x_0 = \frac{\pi}{2}, y_0 = 0,$

$$(3) I = \mathbb{R}_+^*, f(x) = x + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sqrt{x}}, x_0 = 1, y_0 = 1,$$

Exercice 4. Calculer

$$\begin{array}{lll} (1) \int_0^1 e^{-t} dt & (4) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) \cos(t) dt & (6) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos(t)^2} dt \\ (2) \int_0^1 \frac{e^t}{1+e^t} dt & (5) \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin(2t)}{\cos(t)} dt & (7) \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t}} dt \\ (3) \int_0^2 9t^2 \sqrt{1+t^3} dt \end{array}$$

Exercice 5.

Calculez dans chaque cas une primitive des fonctions définies par les formules suivantes. Vous aurez éventuellement besoin d'une intégration par parties.

$$\begin{array}{ll} \text{a) } f(x) = \sin(5x) - 2\cos(3x) + 4\sin(2x) & \text{f) } f(x) = x^2 e^x \\ \text{b) } f(x) = \frac{x}{(x^2-4)^2} & \text{g) } f(x) = \frac{x}{e^x} \\ \text{c) } f(x) = \sin(x) \cos(x)^3 & \text{h) } f(x) = (2x+1)e^x, \\ \text{d) } f(x) = x \cos(x) & \text{i) } f(x) = \frac{\ln(x)}{x} \\ \text{e) } f(x) = x^2 \sin(x) & \text{j) } f(x) = x^2 \ln(x) \end{array}$$

Exercice 6. Calculer $2 \int_1^2 \ln(t) dt + \int_1^2 \left(\frac{1}{2\sqrt{t}} + \ln\left(\frac{1}{t^2}\right)\right) dt$.

Exercice 7. Déterminer une primitive de la fonction f définie par (on ne cherchera pas à déterminer le domaine de définition) :

$$\begin{array}{l} f(x) = 1 - \frac{1}{\cos(x)^2}, \quad f(x) = \cos\left(\frac{x-\pi}{4}\right), \quad f(x) = \frac{(\sqrt{x}+1)^3}{5\sqrt{x}}, \quad f(x) = \sin(x) \cos(x)^2, \\ f(x) = \left(\frac{x}{x^4+1}\right)^3, \quad f(x) = \frac{\cos(x)}{\sqrt{2+\sin(x)}}, \quad f(x) = x \cos(x) + \sin(x), \quad f(x) = x \cos(x^2), \\ f(x) = \frac{x^2}{(x^3+2)^3}, \quad f(x) = \frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right), \quad f(x) = \frac{1}{\sin(x) \tan(x)}, \quad f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x+3}} \end{array}$$

3. EQUATIONS, INÉQUATIONS

Exercice 8. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations ou systèmes d'inconnue x :

$$\begin{array}{ll} \text{(a) } 3x^2 - x + 10 < 0 & \text{(f) } \frac{2x-3}{5x+4} \geq 0 \\ \text{(b) } x^2 - (3x+5)^2 \leq 0 & \text{(g) } |x^2 - 8x + 1| = 4 \\ \text{(c) } \frac{x+1}{x-1} \leq x^2 + x - 1 & \text{(h) } |x+1| = |2x-3| \\ \text{(d) } (x+1)^3 - x^3 - 1 = 0 & \text{(i) } |2-x| < |x+1| \\ \text{(e) } 15x^2 + 14x + 3 \leq 0 & \end{array}$$