
CALCULS 1

Exercice 1. Simplifier

$$(a) \ A = \left(\frac{2^3 \times 5^{-3}}{4 \times 25} \right)^2 : \frac{10^2 \times 2}{5^8} \quad (b) \ B = \frac{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}}{1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{1 - \frac{1}{3}}} \quad (c) \ C = \frac{\sqrt{3}}{4 - \frac{1}{\sqrt{3} + 1}}.$$

Exercice 2. Calculer les quantités suivantes (sans calculatrice!)

$$\begin{array}{ll} (1) \ \frac{45}{10} - \frac{6}{4} & (5) \ \frac{\frac{3}{2} - \frac{2}{3}}{\frac{5}{3} - \frac{3}{5}} \\ (2) \ \frac{10}{25} - \frac{1}{2} & (6) \ \frac{1 - \frac{1}{9}}{1 - \frac{1}{3}} \\ (3) \ \frac{3}{35} - \frac{1}{21} & (7) \ (1 + 2 + 3 + 4) \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) \\ (4) \ \frac{\frac{2}{9} + 2}{1 + \frac{1}{15}} & (8) \ (1 \times 2 \times 3 \times 4) \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) \end{array}$$

Exercice 3. Toujours sans calculatrice, simplifier les écritures suivantes :

$$\begin{array}{ll} (1) \ \frac{36}{70} & (6) \ \sqrt{50} \\ (2) \ \frac{2^5}{6 \times 5} & (7) \ \sqrt{1 + \frac{4}{30}} \\ (3) \ \frac{3 + 4}{1 - \frac{2}{7}} & (8) \ \ln(9) \\ (4) \ \sqrt{8} & (9) \ \ln(8) \\ (5) \ \frac{2}{\sqrt{2}} & (10) \ \frac{\ln(4)}{\ln(9)} \end{array}$$

Exercice 4. Simplifier, au maximum, les quantités suivantes :

$$\begin{array}{ll} (1) \ (x^2 + x + 1)^2 - (x + 1)^3 & (5) \ \frac{(x + 1)^2 - (x - 1)^2}{\sqrt{x}} \\ (2) \ (x + 1)^4 - 4x(x + 1)^2 & \\ (3) \ (x^2 + \sqrt{2}x + 1)(x^2 - \sqrt{2}x + 1) & \\ (4) \ 1 + t - \frac{1}{1 - t} & (6) \ \frac{1 + t}{\sqrt{1 - t^2}} \end{array}$$

Exercice 5. Simplifier, au maximum, les quantités suivantes :

$$\begin{array}{ll} (1) \ AB \text{ avec } A = \frac{1}{1+t^2} - \frac{1}{(1+t)^2} \text{ et } B = (1+t^2)(1+t)^2. & \\ (2) \ \frac{A(n^2)}{A(n)} \text{ avec } A(n) = 0 + 1 + 2 + \dots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}. & \end{array}$$

(3) En posant $q = 1 - p$, pour $p \in [0, 1]$

(a) $\frac{p^2}{1 - q - pq}$

(b) $\frac{1}{2(p - q)} \left(\frac{1}{1 - \frac{p}{2}} - \frac{1}{1 - \frac{q}{2}} \right)$

(c) $\ln \left(\frac{pq}{1 - p} - \frac{q^2 - q}{1 - q} \right)$

(4) $\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2}$ sachant que $a^3 - a^2 + a = 0$.

(5) $2a^2(2a + 1) - a(a - 1)^2 + 1$ sachant que $a^3 + a^2 + a = 1$.

Exercice 6. Résoudre les équations suivantes :

(1) $2x + 3 = 5x - 1$

(2) $\frac{5x - 1}{2x - 1} = 3$

(3) $\frac{2x + 3}{x - 1} - \frac{2x - 1}{x + 1} = 6$

(4) $e^x = e^{-x}$

(5) $\frac{4x + 1}{6x - 2} = \frac{2x + 3}{3x - 2}$

(6) $\ln(1 + x^2) = 1$

(7) $x = 2\sqrt{x}$

(8) $e^{2x} - 2 = e^x$

Exercice 7. Résoudre les équations suivantes, en fonction des autres paramètres :

(1) $ax + 1 = x - b$, inconnue x

(2) $\frac{ax + 1}{bx + 1} = \frac{ax - 1}{bx - 1}$, inconnue x

(3) $\sqrt{x} = \ln(t) + x$, inconnue t

(4) $\sqrt{x} = \ln(t) + x$, inconnue x

(5) $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = a$, inconnue x

(6) $b + a = ba$, inconnue a

Exercice 8. Résoudre les inéquations suivantes :

(1) $x^2 \geq x$

(3) $\frac{1}{\sqrt{x}} - \sqrt{x} > 0$

(5) $\frac{x^2 + 2}{2x - 1} > x$

(2) $\frac{t}{e^t - 1} + t > 0$

(4) $\frac{2x + 1}{x - 2} > 2$

(6) $\frac{1}{1 + x} + \frac{1}{1 - x} > 0$

Exercice 9. Déterminer le domaine de définition, la dérivée, et les variations des fonctions suivantes :

(1) $f : x \mapsto (x^2 + x + 1)(x - 1)$

(3) $f : x \mapsto e^{-x^2}$

(6) $f : x \mapsto (x^2 + x + 1)^3$

(2) $f : x \mapsto x \ln(x)$

(4) $f : x \mapsto (x + x^2)^2$

(5) $f : x \mapsto \ln(1 + e^{-x})$

(7) $f : x \mapsto \cos(2x)$