

**TD2 : NOMBRES COMPLEXES**

---

**Exercice 1.** Mettre chacun des nombre complexes suivants sous sa forme algébrique

$$i - (3 + 2i), \quad (5 + 3i)^2, \quad \frac{1}{1-i}, \quad \frac{1}{2-3i}.$$

**Exercice 2.** On pose  $\alpha = \frac{3-i}{5+7i}$  et  $\beta = \frac{3+i}{5-7i}$ . Montrer sans calcul que  $\alpha + \beta$  est réel et que  $\alpha - \beta$  est imaginaire pur.

**Exercice 3.** On pose  $j = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ . Calculer  $j^2$  puis  $1 + j + j^2, j^3, \frac{1}{j}, \bar{j}$ .

**Exercice 4.** Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique :

|                    |                                                 |                                      |
|--------------------|-------------------------------------------------|--------------------------------------|
| (1) $i(5-i)(i-1)$  | (5) $(1+i)^4$                                   | (9) $\frac{3+2i}{i}$                 |
| (2) $(1+i)(1+2i)$  | (6) $(1+i)^{2000}$                              | (10) $\frac{i-1}{i+1}$               |
| (3) $(5+3i)(5-3i)$ | (7) $\frac{1}{i}$                               | (11) $\frac{3-5i}{2-i}$              |
| (4) $(1+i)^2$      | (8) $\frac{1}{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}$ | (12) $\frac{\sqrt{3}+i}{\sqrt{3}-i}$ |

**Exercice 5.** Écrire les nombres complexes suivants sous forme algébrique et calculer leur module :

$$z_1 = \frac{1}{i}, \quad z_3 = \frac{1+2i}{1-3i}, \quad z_4 = \frac{(2+3i)^2}{4-2i}, \quad z_5 = \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}, \quad z_6 = \frac{(5-i)^6}{(3+2i)^5}.$$

**Exercice 6.** Déterminer le conjugué des nombres complexes suivants (on ne demande pas la forme algébrique) :

$$3-11i, \quad 8i, \quad i(9+2i), \quad (3+i)(-13-2i), \quad (2+5i)^6, \quad (1+i)^3(1-2i)^4, \\ \frac{2-3i}{8+5i}, \quad \frac{i(1-9i)}{(3+7i)^2}, \quad \frac{2}{1+i} - \frac{3}{1-i}.$$

**Exercice 7.** Soit  $z$  un nombre complexe. Sans calculs, justifier que les nombres suivants sont soit réels, soit imaginaires purs :

$$A = z^2 + \bar{z}^2, \quad B = \frac{z - \bar{z}}{z^3 + \bar{z}^3}, \quad C = \frac{z^2 - \bar{z}^2}{z\bar{z} + 2}.$$

**Exercice 8.** Calculer le module des nombres complexes suivants :

$$-5, \quad \frac{2i}{3}, \quad -7i, \quad 1+i, \quad i-1, \quad \sqrt{3}+i, \quad 1+i\sqrt{3}, \quad \sqrt{3}+i\sqrt{2}$$

$$(4+3i)(12-5i), \quad (2-7i)^3, \quad \frac{7}{(2-i)^2}, \quad \frac{3+i}{4+i}, \quad \frac{5+9i}{5-9i}$$

**Exercice 9.** Résoudre dans  $\mathbb{C}$  :

$$\begin{array}{ll} (1) \quad iz + 2 - i = 0 & (6) \quad \begin{cases} 2z + z' = 1 - i \\ z - iz' = 0 \end{cases} \\ (2) \quad (3 + 5i)z = 1 - z & (7) \quad |z| = |z^2|. \\ (3) \quad \frac{z+1}{z-1} = 2i & (8) \quad (iz+1)(z+3i)(\bar{z}-1+4i) = 0 \\ (4) \quad (7-i)\bar{z} + 3 = 0 & \\ (5) \quad \begin{cases} z - z' = i \\ iz + z' = 1 \end{cases} & \end{array}$$

**Exercice 10.**

(1) Placer dans le plan complexe les points  $A, B, C, D$  d'affixes respectives  $a = -1$ ,  $b = 3$ ,  $c = 1 + 2i\sqrt{3}$  et  $d = 7$ .

(2) Étudier la nature des triangles  $ABC$  et  $ACD$ .

**Exercice 11.** Résoudre l'équation d'inconnue  $z \in \mathbb{C}$  :

$$\begin{array}{l} (1) \quad iz + 1 = 2i \\ (2) \quad (1+i)z = -2 + 5i. \end{array}$$

**Exercice 12.** Déterminer et représenter l'ensemble  $E$  des points du plan  $M$  d'affixe  $z$  tels que

$$\begin{array}{lll} (1) \quad |z| = 2 & (4) \quad |\bar{z} + i| = 2 & (7) \quad \left| \frac{z+i}{1+i-z} \right| = 1 \\ (2) \quad |z - 3i| = 5 & (5) \quad |z - 2 + i| = |\bar{z} + 3i| & \\ (3) \quad |z| = |z - 6 + 5i| & (6) \quad |-2iz + 1 + 4i| = 4 & \end{array}$$

**Exercice 13.** (1) On décrit  $C$  comme étant le cercle de centre  $C$  d'affixe  $4 + 2i$  et de rayon 3. Décrire l'équation complexe de  $C$  : “ $M(z)$  appartient à  $C$  ssi ... ”

(2) Soit  $D$  la droite passant par  $A$  d'affixe  $2i$  et par  $B$  d'affixe 2. Donner une équation complexe de  $D$  : “ $M(z)$  appartient à  $D$  ssi ... ”

**Exercice 14.** Déterminer l'ensemble des points  $M$  d'affixe  $z \in \mathbb{C}$  tels que  $|z| = |z^2|$ .

**Exercice 15.** \* Pour tout  $z \in \mathbb{C} \setminus \{-1\}$ , on pose  $\alpha = \frac{z-1-i}{z+1}$ .

(1) Déterminer l'ensemble des points du plan complexe d'affixe  $z$  tels que  $\alpha$  soit réel. Représenter cet ensemble dans le plan complexe.

(2) Déterminer l'ensemble des points du plan complexe d'affixe  $z$  tels que  $\alpha$  soit imaginaire pur. Représenter cet ensemble dans le plan complexe.

(3) Déterminer l'ensemble des points du plan complexe d'affixe  $z$  tels que  $|\alpha| = 1$ . Représenter cet ensemble dans le plan complexe.

**Exercice 16.** \* Pour tout points  $M$  d'affixe complexe  $z$  on considère les nombre complexe  $z_1 = z^2$ ,  $z_2 = \frac{1}{z}$  et  $z_3 = \frac{z+1}{z-i}$ .

(1) Déterminer et dessiner l'ensemble  $E_1$  (respectivement  $E_2$  ou  $E_3$ ) des points  $M$  tels que  $z_1$  (resp.  $z_2$  ou  $z_3$ ) soit réel.

(2) Déterminer et dessiner l'ensemble  $F_1$  (respectivement  $F_2$  ou  $F_3$ ) des points  $M$  tels que  $z_1$  (resp.  $z_2$  ou  $z_3$ ) soit imaginaire pur.

**Exercice 17.** Soient  $a$  et  $b$  deux entiers naturels. On suppose que  $a$  et  $b$  sont chacun la somme de deux carrés d'entiers. Montrer qu'alors leur produit  $ab$  est aussi la somme de deux carrés d'entiers.

**Exercice 18.**

(1) Déterminer l'ensemble des nombres complexes  $z$  tels que  $\frac{z+i}{z-3i} \in \mathbb{R}$ .

(2) Déterminer l'ensemble des nombres complexes  $z$  tels que  $\frac{2z+1}{iz-2} \in i\mathbb{R}$ .

**Exercice 19.** Déterminer l'ensemble des points  $M(z)$  tels que

$$|iz - 4| = |z - 2|, \quad |iz - 4| = 2|z - 2|.$$

**Exercice 20.** Mettre chacun des nombres complexes suivants sous forme trigonométrique :

- |                      |                                    |                                                      |
|----------------------|------------------------------------|------------------------------------------------------|
| (1) $-i$             | (6) $(1 + i\sqrt{3})^3$            | (10) $\frac{(1+i)^2}{(1-i)^3}$                       |
| (2) $-7$             | (7) $\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}$       | (11) $\cos(\frac{\pi}{12}) - i \sin(\frac{\pi}{12})$ |
| (3) $\frac{-3}{i}$   | (8) $\frac{2i(1-i)}{3+3i\sqrt{3}}$ | (12) $\sin(\frac{\pi}{12}) + i \cos(\frac{\pi}{12})$ |
| (4) $2 - 2i$         | (9) $\frac{2i-2\sqrt{3}}{4i+4}$    | (13) $1 - i \tan(\frac{\pi}{15})$                    |
| (5) $3i - 3\sqrt{3}$ |                                    |                                                      |

**Exercice 21.** En utilisant la forme exponentielle, déterminer le module et l'argument des quotients suivants.  $a = \frac{\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}}$ ,  $b = (1-i)^{11}$ ,  $c = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{17}$ ,  $d = (\sqrt{3} + i)^{20}$

**Exercice 22.** Mettre chacun des nombres complexes suivants sous forme trigonométrique :

- |                    |                         |                                    |
|--------------------|-------------------------|------------------------------------|
| (1) $-i$           | (4) $2 - 2i$            | (7) $\frac{1+i}{\sqrt{3}+i}$       |
| (2) $-7$           | (5) $3i - 3\sqrt{3}$    | (8) $\frac{2i(1-i)}{3+3i\sqrt{3}}$ |
| (3) $\frac{-3}{i}$ | (6) $(1 + i\sqrt{3})^3$ | (9) $\frac{2i-2\sqrt{3}}{4i+4}$    |

$$(10) \frac{(1+i)^2}{(1-i)^3}$$

$$(11) \cos\left(\frac{\pi}{12}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

$$(13) 1 - i \tan\left(\frac{\pi}{15}\right)$$

$$(12) \sin\left(\frac{\pi}{12}\right) + i \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$$

$$(14) (2000+i)^3 + (2000-i)^3$$