

TD1B – FONCTIONS USUELLES

1. RÉSOLUTION D'ÉQUATIONS

Exercice 1. Résoudre en $x \in \mathbb{R}$ les équations suivantes :

- | | |
|---|---|
| (1) $\ln(x)^2 + 3\ln(x) + 2 = 0$ | (4) $2x - 3 = \sqrt{x}$ |
| (2) $e^{2x+\ln(2)} + e^{x+\ln(5)} - 3 = 0$ | (5) $\sqrt{2x+4} = x + 1$ |
| (3) $\ln\left(\frac{1}{2}x^2 - ex + e^2\right) = 3$ | (6) $e^x + me^{-x} = 1$ (en fonction du paramètre $m \in \mathbb{R}$). |

Exercice 2. Résoudre en $x \in \mathbb{R}$ les inéquations suivantes :

- | | |
|-------------------------------------|--|
| (1) $2e^{2x} + 2e^x - 4 \leq 0$ | (3) $\ln(3x^2 + 5x - 2) < 0$ |
| (2) $\ln(x)^2 - 5\ln(x) + 4 \geq 0$ | (4) $\frac{1}{2}\ln(4x) \leq \ln(3 - x)$. |

Exercice 3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations ou systèmes d'inconnue x :

- | | |
|--|--------------------------------|
| (a) $3x^2 - x + 10 < 0$ | (f) $\frac{2x-3}{5x+4} \geq 0$ |
| (b) $x^2 - (3x + 5)^2 \leq 0$ | (g) $ x^2 - 8x + 1 = 4$ |
| (c) $\frac{x+1}{x-1} \leq x^2 + x - 1$ | (h) $ x + 1 = 2x - 3 $ |
| (d) $(x + 1)^3 - x^3 - 1 = 0$ | (i) $ 2 - x < x + 1 $ |
| (e) $15x^2 + 14x + 3 \leq 0$ | |

Exercice 4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes :

$$1 - \frac{1}{1-x} > 0, \quad 4x^2 - (3x + 2)^2 < 0, \quad \frac{5x-7}{3x+2} \leq 0, \quad 1 < x^2 - 2x + 3 < 4, \quad \left| \frac{5x+1}{x-3} \right| < 1.$$

Exercice 5. Tracer le graphe des fonctions $x \mapsto |x|$, $x \mapsto |3x - 2|$, $x \mapsto |x^2 - 2|$

Exercice 6. Résoudre les équations ou inéquations :

$$|x - 1| \leq 2, \quad \left| \frac{x-1}{x+1} \right| = 0, \quad \left| \frac{2x-1}{x+1} \right| < 1, \quad |x + 2| \leq 2x - 5$$

Exercice 7. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Prouver les inégalités suivantes :

- (1) $1 + |xy - 1| \leq (1 + |x - 1|)(1 + |y - 1|)$
- (2) $\frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}$

Exercice 8. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations ou systèmes d'inconnue x :

- (a) $4x^2 + 16|x + 2| = 47$ (d) $(3x + 1)(-2x + 5) > 0$ (g) $\left| \frac{2x+1}{x-1} \right| < 0$
 (b) $2x - \sqrt{x} - 1 < 0$ (e) $1 \leq x^2 - 2x + 3 \leq 4$ (h) $x^4 + 3x^2 - 4 > 0$
 (c) $8x^3 + (2x + 1)^3 = 0$ (f) $\frac{x^2-2x-8}{x^2-5x+6} \leq 0$ (i) $x^3 - 2x + 1 = 0$.

Exercice 9. Déterminer l'ensemble des valeurs du paramètre m pour lesquelles l'expression

$$f(x) = (m - 2)x^2 - 2(m - 5)x + m + 3$$

est strictement positive pour toute valeur de x .

2. FONCTIONS LOGARITHME, EXPONENTIELLE ET PUISSANCE.

Exercice 10. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln\left(\frac{x+3}{2}\right) = \frac{1}{2}(\ln x + \ln 3)$.

Exercice 11. Étudier la fonction $f : x \mapsto \frac{x \ln(x)}{x-1}$.

Exercice 12. Montrer que pour tout $x \geq 0$, les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$\ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}, \quad 0 \leq e^x - 1 \leq xe^x, \quad 0 \leq e^x - 1 - x \leq \frac{x^2}{2}e^x.$$

Exercice 13. Simplifier lorsque c'est possible les expressions suivantes :

$$a_0 = e^{2 \ln 2}, \quad a_1 = e^{-\ln 3}, \quad a_2 = \ln\left(\frac{1}{e^6}\right), \quad a_3 = \sqrt{(e^x)^2}, \quad a_4 = \sqrt{e^{(x^2)}}.$$

Exercice 14. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

- (1) $\ln\left(\frac{x+3}{2}\right) = \frac{\ln(x) + \ln(3)}{2}$
- (2) $3^{2x} - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{7}{2}} - 3^{2x-1}$.
- (3) $(\sqrt{x})^x = x^{\sqrt{x}}$.
- (4) $\ln|2x+1| + \ln|x+3| < \ln 3$.

Exercice 15. (*)

(1) Étudier et tracer le graphe de l'application $f : (x \mapsto x^x)$. Peut-on prolonger f par continuité en 0 ? Préciser, si le calcul est possible, les tangentes en 0 et en 1.

(2) Étudier et tracer le graphe de l'application $f : (x \mapsto x^{\frac{1}{x}})$. Peut-on prolonger f par continuité en 0 ? Préciser, si le calcul est possible, les tangentes en 0 et en 1.

3. CALCUL DE DÉRIVÉES

Exercice 16. Déterminer le domaine de dérivabilité des fonctions suivantes, et en donner la dérivée :

- (1) $f : x \mapsto \sqrt{\ln(x)^2 - \ln(x)}$
- (2) $f : x \mapsto \frac{1}{(1 - \ln(x))^n}$
- (3) $f : x \mapsto \ln\left(\frac{e^x - 1}{e^x + 1}\right)$
- (4) $f : x \mapsto \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$

$$(5) f : x \mapsto \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

$$(6) f : x \mapsto x\sqrt{|x|}.$$

Exercice 17. Calculer la dérivée des fonctions suivantes

$$(1) f(x) = \ln\left(\frac{x+3}{x-5}\right)$$

$$(5) f(x) = \ln(1 + e^x)$$

$$(2) f(x) = x^2 \ln(x)$$

$$(6) f(x) = x^x$$

$$(3) f(x) = \ln(x - \sqrt{1 + x^2})$$

$$(7) f(x) = 4^{\sqrt{x}}$$

$$(4) f(x) = 5^x \text{ (pour } a > 0, a^x = e^{x \ln(a)})$$

$$(8) f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 5}$$

$$(9) f(x) = \sqrt{x^4 + 1}$$

Exercice 18. Dériver les fonctions suivantes :

$$e^{x^n}, \quad \ln(|x|), \quad x \ln(x) - x, \quad \ln(\sin^2(x) + 1), \quad \cos(\sin(x^2)), \quad \sin^2(x + \sin(x)),$$

$$\frac{x^3 - 3x + 1}{x^4 + 1}, \quad e^{\sin(3x)}, \quad \sin(e^{x+2}).$$

4. ÉTUDE DE FONCTIONS

Exercice 19. Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes, et, en simplifiant les formules, étudier leurs variations et tracer l'allure de leur graphe (en étudiant la parité s'il y a lieu) :

$$(1) f : x \mapsto \frac{\sqrt{1+x}}{1+x}$$

$$(5) f : x \mapsto x^{\frac{1}{\ln(x)}}$$

$$(2) f : x \mapsto \ln(1+x) - \ln(1-x^2) + \ln(1-x)$$

$$(6) f : x \mapsto \sqrt{e^{2x}} - \frac{1}{e^x}$$

$$(3) f : x \mapsto \frac{e^x}{e^{x+1}e^{x-1}}$$

$$(7) f : x \mapsto (1-x)\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

$$(4) f : x \mapsto \ln(x) + \ln(x^2) + \ln(x^3)$$

$$(8) f : x \mapsto (e^x e^{x^2} e^{x^3})^{(1-x)}$$

Exercice 20. Étudier le domaine de définition et la monotonie des fonctions suivantes, et tracer l'allure de leur graphe :

$$(1) f : x \mapsto \frac{1-x}{5+2x}$$

$$(5) f : x \mapsto e^{-2x} - 2e^{-x}$$

$$(2) f : x \mapsto \frac{4}{x^3 - 8}$$

$$(6) f : x \mapsto \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$$

$$(3) f : x \mapsto xe^{x^2}$$

$$(7) f : x \mapsto \ln(4x - x^3 + 4 - x^2)$$

$$(4) f : x \mapsto \ln\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$$

$$(8) f : x \mapsto (1 + \sqrt{x})^x$$

Exercice 21. Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$x \mapsto \ln(1-x), \quad x \mapsto \ln(1-x^2), \quad x \mapsto \sqrt{x^2 - 3x - 4}, \quad x \mapsto \frac{x}{1 - \sqrt{1-x}}.$$

Exercice 22. Faire l'étude complète des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \quad f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}, & \text{(c)} \quad f(x) = \sqrt{x + 2}, & \text{(e)} \quad f(x) = (1 - x)\sqrt{x + 1}, \\
 \text{(b)} \quad f(x) = \frac{1}{(x^2 + x + 1)^2}, & \text{(d)} \quad f(x) = \frac{1}{x \ln(x)}, & \text{(f)} \quad f(x) = \ln(e^{2x} - 1).
 \end{array}$$

Exercice 23. Déterminer le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et l'expression de la dérivée des fonctions suivantes.

$$\begin{array}{lll}
 (1) \quad (x \mapsto e^{\frac{-2}{x^2}}) & (2) \quad (x \mapsto (1 + \frac{2}{x})^x) & (3) \quad (x \mapsto \sqrt{1 + \cos(x)^2})
 \end{array}$$

Exercice 24. Identifier le domaine de définition, et tracer le graphe des fonctions suivantes :

$$\begin{array}{ll}
 (1) \quad f : x \mapsto |x^2 - 1| & (5) \quad f : x \mapsto \sqrt{|x|} \\
 (2) \quad f : x \mapsto |\sqrt{x} - 1| & (6) \quad f : x \mapsto e^{|x|} \\
 (3) \quad f : x \mapsto |\ln(x)| & (7) \quad f : x \mapsto |1 - |x|| \\
 (4) \quad f : x \mapsto \ln(|x|) & (8) \quad f : x \mapsto |\ln(|x|)|.
 \end{array}$$