
TD 3 – LOGIQUE, QUANTIFICATEURS

Exercice 1. On note M l'ensemble des hommes et H l'ensemble des chevaux. Traduire les énoncés suivants dans le langage de la logique formelle :

- | | |
|---------------------------------------|--|
| (1) Alexandre a un cheval. | (5) Les rois ont toujours un cheval. |
| (2) Tout le monde n'a pas de cheval. | (6) Ceux qui ont un cheval sont fiers. |
| (3) Personne n'a de cheval. | (7) Le cheval d'un certain roi est beau. |
| (4) Bucéphale est le cheval d'un roi. | (8) Le cheval d'un roi est forcément beau. |

On utilisera les notations suivantes :

- | | |
|--------------------------------------|-----------------------------|
| — Alexandre : a , | — x est un roi : $R(x)$, |
| — Bucéphale : b , | — x est fier : $F(x)$, |
| — x est le cheval de y : xCy , | — x est beau : $B(x)$. |

Exercice 2. On considère ici l'humanité H tout entière, et on définit sur cet ensemble la relation binaire M , pour laquelle xMy , pour $(x, y) \in H^2$, signifie x aime y . Traduire les énoncés suivants en langue française, et indiquer s'il existe d'éventuelles relations logiques entre eux :

- | | |
|---|---|
| (1) $\forall x \in H, \forall y \in H, xMy$, | (4) $\exists x \in H, \exists y \in H, xMy$, |
| (2) $\exists y \in H, \forall x \in H, xMy$, | (5) $\forall x \in H, \exists y \in H, xMy$, |
| (3) $\exists x \in H, \forall y \in H, xMy$, | (6) $\forall y \in H, \exists x \in H, xMy$. |

Exercice 3. Écrire la négation des énoncés suivants, et dire s'ils sont vrais (et le démontrer) :

- (1) $\forall x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N}, (x < y \implies \exists z \in \mathbb{N} \ x < z < y)$,
- (2) $\forall x \in \mathbb{Q}, \forall y \in \mathbb{Q}, (x < y \implies \exists z \in \mathbb{Q} \ x < z < y)$,
- (3) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}^+, x < \sqrt{y}$,
- (4) $\forall n \in \mathbb{N}, \exists p \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N}, (x \geq p \implies x^2 + 1 \geq n)$,
- (5) $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*, \exists p \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}^*, (n \geq p \implies \frac{1}{n} < \varepsilon)$,
- (6) $\forall A \in \mathbb{R}, \exists B \in \mathbb{R}, \forall x \geq B \ (x - x^2 \geq A)$.

Exercice 4. Soient p, q, r trois propositions. Montrer que les propositions suivantes sont des tautologies.

- | | |
|-------------------------------|---|
| (1) $p \vee (\neg p)$ | (5) $(p \wedge (p \implies q)) \implies q$ |
| (2) $p \implies p$ | (6) $((p \implies q) \wedge (q \implies r)) \implies (p \implies r)$ |
| (3) $p \implies (p \vee q)$ | (7) $(p \implies (q \implies r)) \implies ((p \implies q) \implies (p \implies r))$ |
| (4) $(p \wedge p) \implies p$ | |

Exercice 5. Soient p, q, r, s des propositions. Écrire la négation des énoncés suivants :

$$(1) p \wedge (\neg q)$$

$$(6) (\neg p) \Rightarrow (\neg q)$$

$$(2) p \vee (\neg q)$$

$$(7) \neg(p \vee q) \Rightarrow r$$

$$(3) p \wedge (q \vee r)$$

$$(8) (p \wedge q) \Rightarrow (r \wedge s)$$

$$(4) p \Leftrightarrow q$$

$$(9) p \Rightarrow (q \wedge r)$$

$$(5) p \Rightarrow (\neg Q)$$

$$(10) \forall n \in \mathbb{N}, \exists N \in \mathbb{N}, n \leq N$$

$$(13) \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, y = f(x)$$

$$(11) \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \leq N$$

$$(14) \exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, y = f(x).$$

$$(12) \exists n \in \mathbb{N}, \forall N \in \mathbb{N}, n \leq N$$

Exercice 6. Traduire formellement chacune des propositions suivantes et dire si elle est vraie ou fausse.

(1) Tout entier naturel est un multiple de 3

(2) Pour être multiple de 6 il est nécessaire d'être multiple de 3

(3) Pour être multiple de 6 il est suffisant d'être multiple de 3.

(4) Soit x un réel. Pour avoir $x + 2 \geq 3$ il faut que x soit supérieur à 0.

(5) Soit x un réel. Pour avoir $x + 2 \geq 3$ il suffit que x soit supérieur à 2.

(6) Soit x un réel. On a $x^2 = 4$ seulement si $x = 2$

Exercice 7.

Soit f une fonction. Écrire la négation des phrases suivantes :

a) Si f est surjective alors elle a une limite en $+\infty$.

b) $\forall x \in \mathbb{R}, x > 0$ ou $x < 0$

c) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = y$

d) $\exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, f(x) > y$

e) $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall \epsilon > 0, x > 0 \Rightarrow f(x) < \epsilon$

f) $\forall \epsilon > 0, \forall A \in \mathbb{R}, \exists x > A$ tel que $|f(x)| < \epsilon$ et $f(x) > A$

g) $\forall a \in \mathbb{R}, \exists \ell \in \mathbb{R}$ tel que $\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - a| < \eta \Rightarrow |f(x) - \ell| < \epsilon$

Exercice 8.

Donner une fonction f définie sur D qui vérifie chacune des phrases suivantes puis une qui ne la vérifie pas.

a) $\forall x \in D, \exists y \in D, f(x) > f(y)$

b) $\exists x \in D, \forall y \in D, f(x) = f(y)^2$

Exercice 9.

(1) Soit la proposition "Tous les parapluies sont bleus". Quelle est la négation de cette proposition ?

(2) Soit la proposition "Il existe un parapluie bleu". Quelle est la négation de cette proposition ?

(3) Soit la proposition "Il existe une âme sœur pour chacun d'entre nous". Quelle est la négation de cette proposition ?

Exercice 10.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction.

Exprimer à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes, puis écrire leur négation.

- | | |
|--|--------------------------------------|
| (i) f est croissante | (vii) f est injective |
| (ii) f n'est pas décroissante | (viii) f est surjective |
| (iii) f est impaire | (ix) f n'est pas la fonction nulle |
| (iv) f est constante | (x) f s'annule au moins une fois |
| (v) f est périodique de période 2π | (xi) f s'annule au plus une fois |
| (vi) f n'est ni croissante ni décroissante | |

Exercice 11. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Voici plusieurs propriétés possibles de la fonction f . Quelles sont, en langage courant, leur signification ? Dans chaque cas, pouvez-vous trouver une fonction f qui vérifie cette propriété ? Et une autre qui ne la vérifie pas ?

- | | |
|---|---|
| (i) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(x) < f(y)$ | (iv) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, f(x) = y$ |
| (ii) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists T \in \mathbb{R}, f(x) = f(x + T)$ | |
| (iii) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists T \in \mathbb{R}^*, f(x) = f(x + T)$ | (v) $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, f(x) = y$ |

Exercice 12.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Les propriétés suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Dans chaque cas, justifier.

- (i) Si f est impaire alors elle est croissante.
- (ii) Si f est paire alors elle n'est ni croissante ni décroissante.
- (iii) Si f tend vers 0 en $+\infty$ alors elle est décroissante.
- (iv) Si $f(1) = f(-1)$ alors f est paire.
- (v) Si f est périodique alors f n'est ni paire ni impaire.
- (vi) Si f est périodique alors f est soit paire soit impaire.
- (vii) Si f est impaire alors $f(0) = 0$.
- (viii) Si f est impaire alors f est injective.
- (ix) Si f est paire alors f n'est pas injective.

Exercice 13. L'objectif de cet exercice est de trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui sont paires et vérifient de plus, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x^2 - y^2) = (x + y)f(x - y) + (x - y)f(x + y)$$

Exercice 14. L'objectif de cet exercice est de trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifient, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$,

$$f(x - f(y)) = 1 - x - y$$

Soit donc f une telle fonction.

(1) Démontrer qu'il existe une constante k telle que $f(x) = -x + k$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

(2) Déterminer k et conclure.

Exercice 15. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ telles que pour tout $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, $f(m + n) = f(m)f(n)$.

Exercice 16. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les réels a et b pour avoir : $\forall x \in]0, 1[, ax + b \geq 0$.

Exercice 17. Soit (u_n) la suite réelle définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = \sqrt{3u_n + 4}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 4$.

Exercice 18. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 0$, $u_2 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+3} = 3u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = n(n - 1)$.

Exercice 19. Montrer par contraposée que, si $1 + 2x + 3x^2$ est pair, alors x est impair.

Exercice 20. Montrer par l'absurde qu'il n'existe pas d'entiers (relatifs) a et b tels que $15a + 9b = 1$.

Exercice 21. Montrer que pour toute fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, il existe une unique paire de fonctions p et i telles que p est paire, i est impaire et $f = p + i$.

Exercice 22. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$, $x \in \mathbb{R}$. On note, pour tout entier n , $f^{(n)}$ la dérivée n -ième de f (f dérivée n fois). Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N} \forall x \in \mathbb{R} \quad f^{(n)}(x) = (x + n)e^x.$$