

LOGIQUE ET MÉTHODES

1. QUANTIFICATEURS

- $\forall$ s'appelle *quantificateur universel* et se lit “quel que soit” ou “pour tout”.
- $\exists$ s'appelle *quantificateur existentiel* et se lit “il existe au moins un... tel que...”.
- $\exists!$ s'appelle *quantificateur existentiel* et se lit “il existe un unique... tel que...”.

Exercice 1. Écrire à l'aide de quantificateurs les assertions suivantes :

- (1) Tous les nombres réels positifs sont les carrés d'au moins un réel.
- (2) Pour tous les entiers naturels p et q , si $p\sqrt{2} + q\sqrt{6} = 0$ alors $p = q = 0$.
- (3) Le carré d'un complexe imaginaire pur est négatif.
- (4) Pour tout réel strictement positif ϵ , il existe un entier naturel N tel que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à N , on a $|\frac{1}{n}| < \epsilon$.
- (5) Tout rationnel r s'écrit sous la forme $\frac{p}{q}$ où p appartient à $\mathbb{Z}$ et q appartient à $\mathbb{N}^*$.

Remarque 1.1. Le raisonnement mathématique est basé sur de vraies phrases. Les quantificateurs servent à abréger ces phrases. Cependant il faut toujours bien s'assurer qu'une phrase utilisant des connecteurs logiques a un sens.

Remarque 1.2. L'ordre des quantificateurs est fondamental ! Par exemple, on définit la relation A sur l'ensemble E des élèves par : pour tous $x, y \in E$, xAy ssi “ x est ami avec y ”. Que signifient les assertions :

$$\begin{aligned} \forall x \in E, \quad \exists y \in E, \quad xAy; \\ \exists y \in E, \quad \forall x \in E, \quad xAy. \end{aligned}$$

2. ASSERTIONS ET CONNECTEURS LOGIQUES

2.1. Assertions.

Définition 2.1. On appelle *assertion* toute phrase pour laquelle on peut attribuer une *valeur de vérité* V (vrai) ou F (faux).

Exercice 2. Que dire des lignes suivantes (assertion vraie, assertion fausse, pas une assertion) ?

- (1) “2 est un entier impair” :
- (2) “ $(100 + 2)^2 = 100^2 + 4 + 400$ ” :
- (3) “ $1 + 4 =$ ” :

Remarque 2.2. Selon les auteurs, les assertions sont parfois appelées *proposition* ou *propriété*.

Définition 2.3. On dit que deux propositions sont logiquement équivalentes si elles ont toujours même valeur de vérité.

Étant donné deux propositions p et q , on peut alors définir de nouvelles propositions dites *composées*. Pour cela, on utilise des *connecteurs logiques* qui relient p et q entre eux.

2.2. Connecteurs logiques.

2.2.1. Négation.

Définition 2.4. Soit p une assertion. On définit l'assertion composée non p , aussi noté $\neg p$, qui est vraie lorsque p est fausse et fausse lorsque p est vraie.

On résume cela dans une *table de vérité* :

p	$\neg p$
V	F
F	V

Proposition 2.5. Soit p une assertion. Alors $\neg(\neg p)$ est logiquement équivalente à p .

Démonstration. Dresser la table de vérité. □

2.2.2. Conjonction (et).

Définition 2.6. Soient p, q deux assertions. On définit l'assertion composée p et q , notée $p \wedge q$, qui est vraie lorsque p est vraie et q est vraie, fausse sinon.

On a la table de vérité :

p	q	$p \wedge q$
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Exercice 3.

Soit p une assertion. Que dire de $p \wedge (\neg p)$? $p \wedge F$? $p \wedge V$?

2.2.3. Disjonction (ou).

Définition 2.7. Soient p, q deux assertions. On définit l'assertion composée p ou q , notée $p \vee q$, qui est vraie lorsque p est vraie ou lorsque q est vraie.

Table de vérité :

p	q	$p \vee q$

Remarque 2.8. Le “ou” logique n’est pas exclusif.

Proposition 2.9. Soient p, q des assertions. Alors $\neg(p \vee q)$ est logiquement équivalente à $(\neg p) \wedge (\neg q)$.

Démonstration. Vérification par les tables de vérités :

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$(\neg p) \wedge (\neg q)$	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$

□

Exercice 4. Exprimer $p \vee q$ à l'aide des connecteurs logiques $\neg$ et $\wedge$ sans utiliser $\vee$.

Exercice 5. Soit p une assertion. Que dire de $p \vee (\neg p)$? $p \vee F$? $p \vee V$? Lorsqu'une assertion est vraie quelles que soient les valeurs de vérité de p , une telle assertion est appelée *tautologie*.

Proposition 2.10. Soient p, q, r des assertions. On a

$$\begin{aligned} (p \vee q) \vee r \text{ log. \acute{e}q. \grave{a} } p \vee (q \vee r), & \quad (p \vee q) \wedge r \text{ log. \acute{e}q. \grave{a} } (p \wedge r) \vee (q \wedge r), \\ (p \wedge q) \wedge r \text{ log. \acute{e}q. \grave{a} } p \wedge (q \wedge r), & \quad (p \wedge q) \vee r \text{ log. \acute{e}q. \grave{a} } (p \vee r) \wedge (q \vee r). \end{aligned}$$

Démonstration. Laissée au lecteur.

□

2.2.4. Implication.

Définition 2.11. Soient p, q deux assertions. On définit l'assertion composée (p implique q), notée $p \Rightarrow q$, comme étant logiquement équivalente à $(\neg p) \vee q$.

Table de vérité :

p	$\neg p$	q	$p \Rightarrow q$

Remarque 2.12. Soient p, q deux assertions. $p \Rightarrow q$ peut être vraie même quand q est fausse. En effet : $(F \Rightarrow F)$ est Vraie. On remarque aussi que “Faux implique Vrai” est Vraie.

Exemple 2.13. $(1 = 2) \Rightarrow (2 < 3)$ est-elle vraie ou fausse?

Proposition 2.14. Soit p une proposition. Si p est vraie et $p \Rightarrow q$ est vraie alors q est vraie.

2.2.5. Equivalence.

Définition 2.15. Soient p, q deux assertions. On définit l'assertion composée (p équivalent à q), notée $p \Leftrightarrow q$, comme étant logiquement équivalente à $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$.

Table de vérité :

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$p \Leftrightarrow q$

Exercice 6. Montrer que $p \Rightarrow q$ est logiquement équivalente à $(\neg q) \Rightarrow (\neg p)$.

Exercice 7. Exprimer $p \Leftrightarrow q$ à l'aide des connecteurs logiques $\neg$, $\vee$ et $\wedge$, puis à l'aide des connecteurs logiques $\neg$ et $\wedge$.

Proposition 2.16. Soient p, q deux assertions. L'assertion $p \Leftrightarrow q$ est vraie si et seulement si p et q sont logiquement équivalentes.

Exercice 8. Soient p, q des assertions. Montrer que les assertions $p \Leftrightarrow p$, $(p \wedge q) \Rightarrow p$ et $p \Rightarrow (p \vee q)$ sont des tautologies

Proposition 2.17. Soit $p(x)$ une proposition dépendant d'une variable x . Les assertions $\neg(\forall x, p(x))$ et $\exists x, (\neg p(x))$ sont logiquement équivalentes.

Exercice 9. Nier les phrases suivantes :

- (1) Tous les soirs, il y a des enfants qui se couchent tard.
- (2) Les retraités sont des personnes âgées.
- (3) Il existe des chiens obéissants et beiges.
- (4) Un arbre du parc est un chêne ou un érable.
- (5) Tous les animaux qui manquent d'affection sont agressifs.

Exercice 10. Nier les phrases suivantes :

- (1) $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 < x + 1$,
- (2) $\forall x \in \mathbb{R}_+, \exists y \in \mathbb{R}, x = y^2$,
- (3) $\forall n, m \in \mathbb{Z}, (n\sqrt{2} + m\sqrt{3} = 0) \Rightarrow (n = m = 0)$,
- (4) $(\xi \in E)$ et $\forall x \in A, x \leq \xi$,
- (5) $\forall M > 0, \exists x_0 \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, (x > x_0) \Rightarrow (f(x) > M)$,
- (6) $\forall x \in A, x > \sqrt{x}$ ou $\ln x > 0$.

3. DIFFÉRENTS MODES DE RAISONNEMENTS

Convention : en mathématiques, on n'écrit que des phrases vraies : écrire p c'est sous entendre " p est vrai".

Terminologie : Dans $p \Rightarrow q$ p est appelée la prémisse ou l'hypothèse et q est appelée la conclusion. On dit aussi que p est une condition suffisante de q ; on dit que q est une condition nécessaire de p .

3.1. Quelques principes de rédaction en mathématiques.

Introduire ce dont on parle: Comment introduire un objet mathématique dépend du statut logique de l'objet à introduire.

- (1) s'il s'agit d'un objet quelconque variant dans un ensemble E . on écrit " $\text{Soit } x \in E$ ".

Exemple 3.1. Montrer que : $\forall f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, (f \text{ croissante et bornée} \Rightarrow \exists L \in \mathbb{R}, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L)$

La rédaction de la preuve *doit* commencer par : " $\text{Soit } f \text{ une fonction de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R}. \text{ Supposons } f \text{ croissante et bornée. Montrons qu'il existe un réel } L \text{ tel que : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L \dots$ "

- (2) s'il s'agit d'un objet précis déjà défini auquel on souhaite donner un nom par souci de clarté ou de concision.

Exemple 3.2. Si on doit utiliser plusieurs fois l'expression $(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i})^{30}$, on peut choisir de noter B cette quantité. On écrit alors : "Notons ou on note ou posons $B = (\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i})^{30}$."

Mettre en évidence les articulations logiques: Quand on écrit un raisonnement, ne jamais remplacer des connecteurs logiques type donc, alors par le symbole $\Rightarrow$.

Vous *devez* toujours indiquer les liens logiques entre les différentes phrases de votre raisonnement en utilisant des connecteurs logiques : donc, alors, ainsi, par conséquent, or, de plus, ensuite, enfin, mais, mais alors, comme, puisque, car...

Annoncer ce que l'on va faire: Chaque preuve doit commencer par "Montrons que..."

Attention avec les fonctions: Faire la différence entre la fonction f et l'expression $f(x)$.

Exemple 3.3. Quelques notations interdites : $f(x)'$ ou f dérivable pour tout x dans $\mathbb{R}$.

3.2. Rédactions types. On a :

À démontrer	Rédaction
$P \Rightarrow Q$	Supposons P. Montrons Q : donc Q. Conclusion : $P \Rightarrow Q$.
$P \wedge Q$	Montrons P et montrons Q : ...donc P. ...donc Q. Conclusion : $P \wedge Q$.
$P \vee Q$	(on se ramène à une implication : $\neg P \Rightarrow Q$) Supposons non P. Montrons Q : ...donc Q. Conclusion : $\neg P \Rightarrow Q$ est vraie donc $P \vee Q$ est vraie.
$P \Leftrightarrow Q$	2 étapes : Supposons P. Montrons Q :... Supposons Q. Montrons P :... Conclusion
$\forall x \in E, P(x)$	Soit $x_0 \in E$ (on fixe un élément quelconque de E pour lequel on va montrer que P est vrai) Montrons $P(x_0)$: ... Donc, $P(x_0)$. Conclusion : $\forall x \in E, P(x)$
$\exists x \in E, P(x)$	Tout le travail consiste à trouver un élément de E qui convient. Après l'avoir trouvé, on écrit : Posons $x_1 = \dots$ alors ... d'où $P(x_1)$. Conclusion : $\exists x \in E, P(x)$

3.3. Raisonnements classiques.

3.3.1. *Raisonnement direct.* Les hypothèses amènent de manière directe la conclusion (voir Proposition 2.14).

Exercice 11. Montrer que la somme de deux fonctions décroissantes est décroissante.

3.3.2. *Raisonnement par l'absurde.* Pour démontrer une propriété P , nous la supposons fausse et aboutissons à une contradiction. C'est donc qu'elle est vraie.

Exercice 12. Montrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

3.3.3. *Raisonnement par contraposée.* On veut montrer qu'une propriété p implique une propriété q . Pour cela on suppose non q et on montre alors qu'elle implique non p .

Exercice 13. Montrer que tous les nombres premiers supérieurs ou égaux à 3 sont impairs.

3.3.4. *Raisonnement par récurrence.* On définit une propriété $(\mathcal{H}_n)$ qui dépend de $n \in \mathbb{N}$. Deux étapes :

Initialisation: On montre qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $(\mathcal{H}_{n_0})$ est vraie.

Hérédité: On considère un entier n supérieur à n_0 . On montre que si $(\mathcal{H}_n)$ est vraie alors $(\mathcal{H}_{n+1})$ est vraie.

On en déduit que pour tout $n \geq n_0$, $(\mathcal{H}_n)$ est vraie.

Exercice 14. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par récurrence par $u_0 = 2$, pour tout entier $n \geq 0$, $u_{n+1} = 1 + \frac{1}{1+u_n}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est bien défini et $1 \leq u_n \leq 2$.