

TD4 – FONCTIONS USUELLES (2)

1. TRIGONOMETRIE CIRCULAIRE

Exercice 1. Calculer la dérivée des fonctions suivantes

(1) $f(x) = \ln(\cos(x))$

(6) $f(x) = \sqrt{3 + \sin(x)}$

(2) $f(x) = e^{\sin(x)}$

(7) $f(x) = \cos(\sqrt{1+x^2})$

(3) $f(x) = \cos(\cos(x))$

(8) $f(x) = \sin\left(\frac{1}{2+x^2}\right)$

(4) $f(x) = \sin(x^2)$

(9) $f(x) = \sqrt{\sin\left(\frac{1}{2+x^2}\right)}$

(5) $f(x) = \frac{\sin(x)^2}{1+\cos(x)^2}$

Exercice 2.

(1) Déterminer $\cos(x)$ dans chacun des cas suivants :

(a) $\sin(x) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ et $x \in]\frac{\pi}{2}, \pi[$

(b) $\sin(x) = \frac{-1}{4}$ et $x \in]\frac{-\pi}{2}, 0[$

(2) Déterminer $\sin(x)$ dans chacun des cas suivants :

(a) $\cos(x) = \frac{-3}{4}$ et $x \in]-\pi, 0[$

(b) $\cos(x) = \frac{2}{5}$ et $x \in]0, \pi[$

(3) Calculer $\cos(2x)$ dans chacun des cas suivants :

(a) $\cos(x) = \frac{-1}{3}$

(b) $\sin(x) = \frac{-\sqrt{3}}{3}$

(4) Calculer $\sin(2x)$ dans chaque cas :

(a) $\sin(x) = \frac{3}{5}$ et $x \in [\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,

(b) $\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}$ et $x \in [\pi, 2\pi]$.

Exercice 3. Soit x, y des réels. On sait que $\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$ et que $\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \sin(y)\cos(x)$.

On définit de plus, si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ avec $k \in \mathbb{Z}$, $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$.

(1) Exprimer en fonction de $\cos x$, $\sin x$ et $\tan x$:

$$\begin{array}{lll} \cos(x-y), & \sin(x-y), & \tan(x-y), \\ \cos(x+\pi), & \sin(x+\pi), & \tan(x+\pi). \\ \cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right), & \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right), & \tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right). \end{array}$$

(2) Développer : $\cos(x + \frac{\pi}{4})$, $\sin(x + \frac{\pi}{3})$.

Exercice 4. Soient $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Simplifier les expressions suivantes :

(1) $\cos(x+y) + \cos(x-y)$

(2) $\cos(x+y) - \cos(x-y)$

(3) $\sin(x+y) + \sin(x-y)$.

(4) Exprimer en fonction de $\cos(x \pm y)$ et $\sin(x \pm y)$:

$$\cos x \cos y, \quad \sin x \sin y, \quad \cos x \sin y.$$

Exercice 5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes :

(1) $\cos(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

(4) $\cos(x) > \frac{1}{2}$

(2) $\sin(x + \frac{\pi}{6}) = -1$

(5) $\sin(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$

(3) $\sin(x) \cos(x) = \frac{-\sqrt{3}}{4}$

(6) $\cos(2x) = 2 + \cos(3x)$

Exercice 6. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations ou inéquations suivantes :

(1) $\cos(x) = \sin(3x)$

(3) $\cos(x) \leq \frac{-\sqrt{3}}{2}$

(2) $\cos(x)^2 - \frac{3}{2} \cos(x) + \frac{1}{2} = 0$

(4) $\cos x = \frac{1}{2}$

(5) $\cos(3x) = \sin(2x)$

Exercice 7. Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations trigonométriques suivantes, d'inconnue réelle x :

(1) $\sin(2x) = \sin(x)$

(6) $\sin(x) + \cos(x) - \frac{\sin(2x)}{\sqrt{2}+1} = \cos(\frac{\pi}{4} - x)$

(2) $\sin(x) = -\cos(x)$

(7) $\sqrt{3} \tan(x) + 4 \sin(x)^2 = 0$

(3) $\tan(3x - \frac{\pi}{5}) = \tan(x + \frac{4\pi}{5})$

(8) $1 + \sqrt{3} \sin(2x) - \cos(4x) = 0$

(4) $\cos(2x) - \sin(x) = 1$

(9) $\cos(x) > \cos(x - \frac{\pi}{6})$

(5) $\sqrt{\sin(x)} + \sqrt{\cos(x)} = 1$

(10) $\sqrt{3 - 4 \cos(x)^2} > 1 + 3 \sin(x)$

Exercice 8.

- (1) Rappeler l'expression de $\cos(2a)$ en fonction de $\cos(a)^2$ pour $a \in \mathbb{R}$
- (2) En déduire l'expression de $\cos(\frac{\pi}{8})$. De même exprimer $\sin(\frac{\pi}{8})$.
- (3) En déduire $\cos(\frac{3\pi}{8})$ et $\sin(\frac{3\pi}{8})$.

2. FONCTIONS CIRCULAIRES RÉCIPROQUES

Exercice 9. Pour tout réel $x \in [-1; 1]$, simplifier l'expression $\cos(2 \arccos x)$.

Exercice 10. Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. Déterminer le domaine de définition, le domaine de dérivabilité et l'expression de la dérivée des fonctions suivantes.

- (1) $(x \mapsto \arctan(e^x))$
- (2) $(x \mapsto \arcsin(x^2 - 1))$
- (3) $(x \mapsto \arccos(\frac{1}{1+x}))$

Exercice 11. Étudier l'application $(x \mapsto x \arctan(\frac{1}{x}))$

Exercice 12. Établir les identités suivantes et préciser leur domaine de validité :

- (1) $\cos(\arcsin x) = \sqrt{1 - x^2}$,
- (2) $\cos(\arctan x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$,
- (3) $\arcsin x = \arccos \sqrt{1 - x^2}$,
- (4) $\sin(2 \arccos x) = 2x\sqrt{1 - x^2}$,
- (5) $\arctan x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$,
- (6) $\arccos x = 2 \arctan \frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x}$.

Exercice 13. Résoudre l'équation

$$2x = \arcsin \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}.$$

Exercice 14. Pour tout $x \in [-\pi; \pi]$, simplifier l'expression $\arcsin\left(\sqrt{\frac{1+\sin x}{2}}\right) - \frac{x}{2}$.

Exercice 15. * Préciser le domaine de validité des expressions suivantes puis les simplifier :

$$\arcsin\left(\frac{x+1}{\sqrt{2(x^2+1)}}\right), \quad \arccos\left(\sqrt{\frac{1+\sin x}{2}}\right), \quad \arctan \frac{2x}{1-x^2}.$$

Exercice 16. ** Soit a un réel positif non nul. On note f_a la fonction définie par

$$f_a : (x \mapsto \arctan\left(\frac{a+x}{1-ax}\right) - \arctan(x)).$$

- (1) Quel est l'ensemble de définition de f_a ? Donner également son domaine de continuité et son domaine de dérivabilité ?
- (2) Montrer que pour tout x dans l'ensemble de définition $f_{-a}(-x) = -f_a(x)$.
- (3) Calculer la dérivée de f_a .

(4) En déduire que,

$$\begin{array}{ll} \text{si } x \in]-\infty, \frac{1}{a}[, & \arctan a + \arctan x = \arctan \left(\frac{a+x}{1-ax} \right) \\ \text{si } x \in]\frac{1}{a}, +\infty[, & \arctan a + \arctan x = \arctan \left(\frac{a+x}{1-ax} \right) + \pi. \end{array}$$

(5) En déduire que, pour $a \in]0, 1[$,

$$2 \arctan(a) = \arctan\left(\frac{2a}{1-a^2}\right).$$