TD 5 : Sommes – Produits

Exercice 1.
Calculer les sommes suivantes :

(1) $\sum_{k=1}^{n} 2^k 3^{n-k}$

(2) $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}$

(3) $\sum_{k=0}^{n} \sum_{p=0}^{k} x^p \binom{k}{p}$

Exercice 2. Écrire avec le symbole $\sum$ les sommes suivantes :

$-a_0 + a_1 - a_2 + a_3 \ldots$
$a_0 + 2a_1 + 3a_2 + 4a_3 \ldots$
$(a_0 - a_1) + (a_2 - a_3) + (a_4 - a_5) \ldots$
$a_1 + a_4 + a_7 + \ldots$
$a_0 - 2a_1 + 4a_2 - 8a_3 \ldots$

Exercice 3. Calculer $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ et $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$.

On pourra chercher $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\frac{1}{X(X+1)} = \frac{a}{X} + \frac{b}{X+1}$ et de même chercher (u, v, w) tels que $\frac{1}{X(X+1)(X+2)} = \frac{u}{X} + \frac{v}{X+1} + \frac{w}{X+2}$.

Exercice 4. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{4^k}$. Montrer que la suite (u_n) converge.

Pour quelles valeurs de $z \in \mathbb{C}$, la suite $v_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} z^{k-1}}{4^k}$ converge-t-elle ?

Exercice 5.
Calculer les sommes suivantes :

(1) $\sum_{i=0}^{n} n$,

(2) $\sum_{k=1}^{n} 1$.

(3) $\sum_{i=1}^{n} 1$

(4) $\sum_{(i,j)\in[\![0,n]\!]^2} 1$

(5) $\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} 1$

(6) $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} 1$

(7) $\sum_{k=2}^{n+2} \pi^{2k}$

(8) $\sum_{k=1}^{n} (-1)^k$

(9) $\sum_{k=2}^{n+1} k$

(10) $\sum_{k=n+1}^{2n} 2k$

(11) $\sum_{k=2}^{n+1} 2^k$

(12) $\sum_{k=1}^{n} 2k$

(13) $\sum_{k=0}^{n} 2^k$

(14) $\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k$

(15) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k}$.

(16) $\sum_{k=1}^{n} 2^k 3^{n-k}$

Exercice 6. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{4n} i^k k$.

Exercice 7. Soit $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de réels telle que $\sum_{k=0}^{n} a_k = n(n+2)$.

(1) Calculer les sommes suivantes :

$$\sum_{k=0}^{6} a_k\,, \qquad \sum_{k=0}^{2n} a_k\,, \qquad \sum_{k=0}^{n} 2a_k\,, \qquad \sum_{k=n+1}^{2n} a_k$$

(2) Exprimer a_n en fonction de n.

Exercice 8. *Sommes téléscopiques.*
Calculer les sommes suivantes :

(1) $\sum_{p=1}^{n} \ln(1+\frac{1}{p})$. (On remarquera que $\ln(1+\frac{1}{p}) = \ln(p+1) - \ln(p)$.)

(2) $\sum_{k=0}^{n} k\,k!$. (On remarquera que $(k+1)! - k! = k \cdot k!$.)

(3) $\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$. (On calculera $\frac{1}{(k+1)!} - \frac{1}{k!}$.)

(4) $\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1}$. (On remarquera que $\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} = \frac{2}{k^2-1}$.)

Exercice 9. Soient $\omega \in \mathbb{R}$ et $x \in]-1,1[$. Pour $n \in \mathbb{N}$, simplifier $S_n = \sum_{k=0}^{n} x^k \sin(\omega k)$.
En déduire $\lim_{n\to\infty} S_n$.

Exercice 10. Calculer les sommes suivantes :

(1) $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} i$

(2) $\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} i$

(3) $\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (i+j)$

(4) $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} x^{i+j}$

(5) $\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i}{j+1}$

(6) $\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} j-i$

(7) $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |i-j|$

(8) $\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} \frac{i^2}{j}$

(9) $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \max(i,j)$

(10) $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (i+j)\,,$

(11) $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \min(i,j)\,,$

(12) $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (i-j)\,,,$

(13) $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} (ij)\,.$

Exercice 11. Soit $n \geqslant 2$. Calculer $\prod_{k=2}^{n}(1-\frac{1}{k})$ et $\prod_{k=2}^{n}(1-\frac{1}{k^2})$.

Exercice 12. Écrire à l'aide de factorielles les expressions suivantes :

(1) $\prod_{k=1}^{n}(2k)$ (2) $\prod_{k=1}^{n} k^2$ (3) $\prod_{k=1}^{n}(2k+1)$

Exercice 13. Soit $n \in \mathbb{N}$. Simplifier les expressions suivantes :

(1) $\prod_{k=0}^{n} e^{-k}$ (3) $\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} i^j$ (4) $\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij$

(2) $\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} x^{i+j}$

Exercice 14.

Calculer les sommes suivantes :

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}$ (3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k$

(2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sum_{p=0}^{k} x^p\binom{k}{p}$ (4) $\displaystyle\sum_{\substack{0\leqslant k\leqslant n\\ k\text{pair}}}\binom{n}{k}$

Exercice 15. Soient $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer une expression simple des sommes suivantes

$$A(x)=\sum_{k=0}^{n}\sin(kx)\,,\qquad B(x)=\sum_{k=0}^{n}k\cos(kx)\,,\qquad C(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos(kx)\,.$$

Exercice 16. Soient (u_n) une suite réelle et (p,q) des entiers naturels tels que $4 \leqslant p \leqslant q$. Simplifier la somme : $T_{p,q}=\sum_{k=p-3}^{q-1}(u_{k+1}-u_{k-1})$.

Exercice 17. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ Simplifier la somme $\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k$.

Exercice 18. Calculer les sommes $S_0=\sum_{p=0}^{n}\binom{n}{p}$, $S_1=\sum_{0\leqslant 2p\leqslant n}\binom{n}{2p}$, $S_2=\sum_{1\leqslant 2p+1\leqslant n}\binom{n}{2p+1}$.

Exercice 19. Montrer que, pour les entiers n et p tels que $0 \leqslant p \leqslant n$, on a

$$\sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}=\binom{n+1}{p+1}\,.$$

Exercice 20. On suppose que n est un entier naturel non-nul et que p et q sont des entiers naturels inférieurs ou égaux à n. Montrer que $\binom{n}{p}=\binom{n}{q}$ implique $p=q$ ou $p=n-q$.

Exercice 21. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}^*$ les sommes suivantes :

$$R=\sum_{p=0}^{n}p\binom{n}{p}\,,\qquad S=\sum_{p=0}^{n}p(p-1)\binom{n}{p}\,,\qquad T=\sum_{p=0}^{n}p^2\binom{n}{p}\,.$$

On pourra s'intéresser aux dérivées du polynôme $P(x)=(1+x)^n$.

Exercice 22. Calculer les sommes $A=\sum_{0\leqslant 3p\leqslant n}\binom{n}{3p}$, $B=\sum_{0\leqslant 3p+1\leqslant n}\binom{n}{3p+1}$, $C=\sum_{0\leqslant 3p+2\leqslant n}\binom{n}{3p+2}$.

Exercice 23. Soient $0 \leqslant k \leqslant p \leqslant n$ des entiers naturels. Montrer que $\binom{n}{k} \times \binom{n-k}{p-k} = \binom{p}{k} \times \binom{n}{p}$
En déduire pour $n \in \mathbb{N}$ et $p \in [\![0, n]\!]$, la valeur de $\sum_{0 \leqslant k \leqslant p} \binom{n}{k}\binom{n-k}{p-k}$.

Exercice 24. Calculer $S = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$.

Exercice 25. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En faisant intervenir une somme double, calculer $\sum_{k=1}^{n} k2^k$.

Exercice 26. Soit n un entier naturel non-nul. Soit $x \in [0, 1]$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n-1}(1-x)^k = \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}(-1)^{k-1}x^{k-1}\,.$$

Exercice 27.

(1) Démontrer, en précisant le domaine de validité, la relation $\tan(x) = \frac{1}{\tan(x)} - 2\frac{1}{\tan(2x)}$.

(2) En déduire la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\tan(\frac{1}{2^k}\frac{\pi}{4})\,.$$

Exercice 28.

(1) Démontrer, en précisant le domaine de validité, la relation $\cos(x) = \frac{\sin(2x)}{2\sin(x)}$.

(2) En déduire la limite de la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$P_n = \prod_{k=0}^{n} \cos(\frac{x}{2^k})\,.$$