Généralités sur les fonctions

1. Notations

1.1. **Ensembles de nombres usuels.** Les ensembles de nombres usuels sont les suivants :

- $\mathbb{N}$ les entiers naturels : 0, 1, 2, 3, 4, ...Plus rigoureusement : 0 est un entier naturel, et si n est un entier naturel alors $n+1$ aussi.
- $\mathbb{Z}$ les entiers relatifs : ...-2, -1, 0, 1, 2...Plus rigoureusement : si n est un entier naturel, alors n est un entier relatif et $-n$ aussi.
- $\mathbb{Q}$ les nombres rationnels : si p et q sont deux entiers relatifs, avec q non-nul, alors $\frac{p}{q}$ est un nombre relatif.
- $\mathbb{R}$ les nombres réels.
- $\mathbb{C}$ les nombres complexes.

1.2. **Intervalles.**

Définition 1.1. Intervalles de $\mathbb{R}$ Soient a et b des réels avec $a < b$. On appelle intervalles de $\mathbb{R}$ les ensembles suivants :

$[a,b]$	segment / intervalle fermé défini par $[a,b] = \{t \in \mathbb{R} \text{ tel que } a \leqslant t \leqslant b\}$
$[a,b[$	intervalle défini par $[a,b[= \{t \in \mathbb{R} \text{ tel que } a \leqslant t < b\}$
$]a,b]$	intervalle défini par $]a,b] = \{t \in \mathbb{R} \text{ tel que } a < t \leqslant b\}$
$]a,b[$	intervalle ouvert défini par $]a,b[= \{t \in \mathbb{R} \text{ tel que } a < t < b\}$
$[a,+\infty[$	intervalle fermé défini par $[a,+\infty[= \{t \in \mathbb{R} \text{ tel que } a \leqslant t\}$
$]-\infty,a]$	intervalle fermé défini par $]-\infty,a] = \{t \in \mathbb{R} \text{ tel que } t \leqslant a\}$
$]a,+\infty[$	intervalle ouvert défini par $]a,+\infty[= \{t \in \mathbb{R} \text{ tel que } a < t\}$
$]-\infty,a[$	intervalle ouvert défini par $]-\infty,a[= \{t \in \mathbb{R} \text{ tel que } t < a\}$
$\{a\}$	singleton ne contenant que a
$\emptyset$	l'ensemble vide.

Remarque 1.2. Soient a et b des réels avec $a < b$. On distingue :
- les intervalles ouverts : $]a,b[$, $]a,+\infty[$, $]-\infty,a[$, $\mathbb{R}$, $\emptyset$,
- les intervalles fermés : $[a,b]$, $[a,+\infty[$, $]-\infty,a]$, $\mathbb{R}$, $\emptyset$,
- les intervalles qui ne sont ni ouverts, ni fermés : $[a,b[$, $]a,b]$

Remarque 1.3. Attention, un ensemble de nombres n'est pas nécessairement un intervalle. Ainsi l'ensemble $\{1,2\}$ n'est pas un intervalle. De façon générale, une réunion d'intervalles n'est pas un intervalle. Par exemple $]1,2[\cup[5,+\infty[$ n'est pas un intervalle.

2. Généralités sur les fonctions réelles d'une variables réelles

2.1. **Définitions.**

2.1.1. *Définition d'une fonction.*

Définition 2.1. Soit A une partie de $\mathbb{R}$. On dit que f est une application définie sur A et à valeurs réelles si à tout point x de A, on peut associer une unique image par f, notée $f(x)$.

On appelle *domaine de définition de* f l'ensemble des réels où f est définie.

Notation : $f : \begin{pmatrix} A & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & f(x) \end{pmatrix}$

2.1.2. *Graphe, domaine de définition, image.*

Définition 2.2. Soit D une partie de $\mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une application définie sur D à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On appelle *graphe de* f (ou courbe représentative de f) l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $y = f(x)$. On le note $\mathcal{G}(f)$. On a donc

$$\mathcal{G}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ tel que } x \in D \text{ et } y = f(x)\} = \{(x, f(x)) \text{ où } x \in D\}\,.$$

Définition 2.3. Soit D une partie de $\mathbb{R}$. On appelle *image* d'une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ l'ensemble des valeurs prises sur son domaine de définition D. On le note $\mathcal{I}(f)$ ou bien $f(D)$. On a donc :

$$f(D) = \mathcal{I}(f) = \{y \text{ tel que } \exists x \in D \text{ avec } y = f(x)\} = \{f(x) \text{ où } x \in D\}.$$

Exercice 1. Donner le domaine de définition et le domaine image des fonctions $(x \mapsto x^2)$, $(x \mapsto 2x + 3)$, $(x \mapsto |x|)$, $(x \mapsto \frac{1}{x})$, $(x \mapsto \sqrt{x})$.

2.2. **Symétries.**

2.2.1. *Parité, imparité.*

Définition 2.4. Soit D une partie de $\mathbb{R}$.

Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est dite *paire* si

$$x \in D \Rightarrow -x \in D\,, \qquad \text{et} \qquad \forall x \in D\,,\ f(-x) = f(x)\,.$$

Une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est dite *paire* si

$$x \in D \Rightarrow -x \in D\,, \qquad \text{et} \qquad \forall x \in D\,,\ f(-x) = -f(x)\,.$$

Proposition 2.5. *Le graphe d'une fonction paire est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.*

Le graphe d'une fonction impaire est symétrique par rapport à l'origine.

Démonstration.

□

Exercice 2. Déterminer la parité ou l'imparité des fonctions suivantes : $(x \mapsto x^2)$, $(x \mapsto x^3)$, $(x \mapsto \frac{1}{x})$, $(x \mapsto |x|)$, $(x \mapsto \sin(x))$, $(x \mapsto \tan(x))$, $(x \mapsto \cos(x))$.

Remarque 2.6. Une fonction quelconque n'est pas nécessairement paire ou impaire. Par exemple $(x \to x + 2)$ n'est ni paire ni impaire.

Théorème 2.7. *Soit D une partie centrée en 0 de $\mathbb{R}$.Soit $f : D \to \mathbb{R}$ une application. Alors il existe de manière unique une fonction paire g et une fonction impaire h définies sur D telles que $f = g + h$.*

Autrement dit : toute fonction se décompose de manière unique en la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Démonstration.

□

2.2.2. *Périodicité.*

Définition 2.8. Soient $T > 0$ et D une partie de $\mathbb{R}$. Une application $f : D \to \mathbb{R}$ est dite *périodique de période T* (ou T-périodique) si

$$x \in D \Rightarrow -x \in D \qquad \text{et} \qquad \forall x \in D\,,\ f(x+T) = f(x)\,.$$

On appelle *la période* de f sa plus petite période positive.

Remarque 2.9. Si T est une période de la fonction f alors $2T$, $3T$, ... nT (avec n un entier) le sont aussi.

Par extension, les fonctions constantes sont des fonctions périodiques de période nulle.

Exemple 2.10.

Proposition 2.11. *Soit $T > 0$. Le graphe d'une fonction T-périodique est invariant par translation horizontale de longueur T.*

Conséquence : Pour étudier une fonction $f, T-$périodique il suffit de l'étudier sur n'importe quel intervalle de longueur T, par exemple $\mathcal{D}(f) \cap [0, T]$.

2.3. **Fonctions et inégalités.**

2.3.1. *Fonctions bornées.*

Définition 2.12. Soit D une partie de $\mathbb{R}$. On dit qu'une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ est
- *majorée* si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in D$, $f(x) \leqslant M$
- *minorée* si il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in D$, $f(x) \geqslant m$.
- *bornée* si f est majorée et minorée, c'est à dire si il existe $(M, m) \in \mathbb{R}^2$ tels que $\forall x \in D$, $m \leqslant f(x) \leqslant M$.

Remarque 2.13. Attention à l'ordre des quantificateurs ! !

Proposition 2.14. *Soit D une partie de $\mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une application.*

f est bornée sur $\mathbb{R}$ si et seulement si il existe $C \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \in D$, $|f(x)| \leqslant C$.

Démonstration.

□

Définition 2.15. Soit D une partie de $\mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une application et $x_0 \in D$.

On dit que f admet un maximum global en x_0 si

$$\forall x \in D\,, \qquad f(x) \leqslant f(x_0)\,.$$

On dit que f admet un minimum global en x_0 si

$$\forall x \in D\,, \qquad f(x) \geqslant f(x_0)\,.$$

2.3.2. *Monotonie.*

Définition 2.16. Soit D une partie de $\mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une application. On dit que
- f est croissante sur D si et seulement si
$$\forall (x,y) \in D^2\,, \qquad x \leqslant y \Rightarrow f(x) \leqslant f(y)\,.$$
- f est strictement croissante sur D si et seulement si
$$\forall (x,y) \in D^2\,, \qquad x < y \Rightarrow f(x) < f(y)\,.$$
- f est décroissante sur D si et seulement si
$$\forall (x,y) \in D^2\,, \qquad x \leqslant y \Rightarrow f(x) \geqslant f(y)\,.$$
- f est strictement décroissante sur D si et seulement si
$$\forall (x,y) \in D^2\,, \qquad x < y \Rightarrow f(x) > f(y)\,.$$

Remarque 2.17.

Définition 2.18. Soit D une partie de $\mathbb{R}$ et $f : D \to \mathbb{R}$ une application. On dit que f est *monotone* si f est soit croissante soit décroissante sur D.

On dit que f est *strictement monotone* si f est soit strictement croissante soit strictement décroissante sur D.

2.3.3. *Compatibilité avec les opérations.*

Définition 2.19. Soit D une partie de $\mathbb{R}$; $f, g : D \to \mathbb{R}$ des applications définies sur D et α un réel. On définit sur D
- la fonction somme $s = f + g$ par : $\forall x \in D\,, \qquad s(x) = f(x) + g(x)\,.$
- la fonction produit $p = f \times g$ par : $\forall x \in D\,, \qquad p(x) = f(x)g(x)\,.$
- la fonction $h = \alpha \cdot f$ par : $\forall x \in D\,, \qquad h(x) = \alpha f(x)\,.$

Proposition 2.20. *Soit D une partie de $\mathbb{R}$ et $f, g : D \to \mathbb{R}$ des applications définies sur D.*
Si f et g sont croissantes sur D, alors $f + g$ l'est aussi.

Démonstration.

□

Exercice 3. Le produit de deux fonctions croissantes est-il encore une fonction croissante ?

2.3.4. *Composition.*

Définition 2.21. Soient I, J deux parties de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ des fonctions.
On suppose que $f(I) \subset J$. On peut alors définir sur I la fonction *composée* notée $g \circ f$ par
$$\forall x \in I\,, \qquad g \circ f(x) = g(f(x))\,.$$

Exercice 4. Que peut-on dire de la composée de deux fonctions monotones ?

3. Continuité et dérivabilité

Les résultats de cette section sont admis et seront démontrés ultérieurement.

3.1. **Continuité.**

Définition 3.1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ un application et $a \in I$ un réel. On dit que f est *continue* en a ssi f admet une limite finie en a et que cette limite est égale à $f(a)$.

On dit que f est continue sur I ssi f est continue en tout point de I.

Exemple 3.2.

Proposition 3.3. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f et g deux applications de I dans $\mathbb{R}$, continues sur I et α un réel.*

Alors $f + g$, $f \times g$, $\alpha \cdot f$ sont également continues sur I.

Théorème 3.4. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ une application continue sur I et $g : J \to \mathbb{R}$ une application continue sur J. On suppose de plus que $f(I) \subset J$.*

Alors $g \circ f$ est continue sur I.

Exercice 5. Étudier la continuité de $(x \mapsto \sqrt{1 + \sin(2x)})$.

3.2. **Dérivabilité.**

Définition 3.5. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ un application et $a \in I$ un réel. On dit que f est *dérivable* en a ssi la limite du taux d'accroissement $\lim_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie.

On appelle alors cette limite *la dérivée de f en a*, et on la note $f'(a)$.

On dit que f est dérivable sur I ssi f est dérivable en tout point de I.

Interprétation géométrique :

Exemple 3.6.

Équation de la tangente :

Proposition 3.7. *Toute fonction dérivable est également continue.*

Remarque 3.8. On étudie la continuité *avant* la dérivabilité !

Par contraposée : si une fonction n'est pas continue alors elle ne sera pas dérivable .

Démonstration.

□

Proposition 3.9. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f et g deux applications de I dans $\mathbb{R}$, dérivables sur I et α un réel.*

Alors $f+g$, $f\times g$, $\alpha\cdot f$ sont également dérivables sur I, et $\forall x\in I$:

$$(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x)\,,\quad (f\times g)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)\,,\quad (\alpha\cdot f)'(x)=\alpha f'(x)\,.$$

Théorème 3.10. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f:I\to\mathbb{R}$ une application dérivable sur I et $g:J\to\mathbb{R}$ une application dérivable sur J. On suppose de plus que $f(I)\subset J$.*

Alors $g\circ f$ est dérivable sur I et $\forall x\in I$

$$(g\circ f)'(x)=g'(f(x))\times f'(x)$$

Démonstration.

□

Remarque 3.11. On note $f'(x)$ ou $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(f(x))$ et non $f(x)'$

Exercice 6. Étudier la dérivabilité de $(x\mapsto\sqrt{1+\sin(2x)})$.

3.3. **Primitives.**

Définition 3.12. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f:I\to\mathbb{R}$ une application. On appelle *primitive* de f sur I toute application F dérivable sur I telle que $F'=f$.

Théorème 3.13. *Toute fonction continue f sur un intervalle I admet une primitive sur I.*

De plus, si F est une primitive de f sur I alors les autres primitives de f sont égales à F à une constante additive près : si G est une autre primitive de f, alors il existe un réel c tel que $G=F+c$.

Définition 3.14. Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f:I\to\mathbb{R}$ une application continue sur I et a,b des points de I. On note F une primitive de f. On appelle alors *intégrale* de a à b de f le réel

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=F(b)-F(a)\,.$$

Remarque 3.15. Ce réel représente l'aire comprise entre l'axe des abscisses et la courbe, comptée positivement si la courbe est au-dessus de l'axe (Ox) et comptée négativement si la courbe est en-dessous de l'axe (Ox).

Théorème 3.16. *Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, $f:I\to\mathbb{R}$ une application continue sur I et $a\in I$. Alors l'application définie sur I définie par $(x\mapsto\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t)$ est la primitive de f qui s'annule en a.*