TD 6 : Généralités sur les fonctions

Exercice 1. Déterminer le domaine de définition des fonctions suivantes :

$$x \mapsto \ln(1-x)\,, \quad x \mapsto \ln(1-x^2)\,, \quad x \mapsto \sqrt{x^2-3x-4}\,, \quad x \mapsto \frac{x}{1-\sqrt{1-x}}\,.$$

Exercice 2. Déterminer les tangentes à la courbe d'équation $y = f(x)$ au point de la courbe d'abscisse a, puis les tangentes à la courbe passant par le point B dans les cas suivants :

(1) $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$, $a = 1$, $B(-1, -3)$

(2) $f(x) = \frac{3x-5}{x-2}$, $a = -1$, $B(0, 3)$

Exercice 3. Déterminer les tangentes à la courbe d'équation $y = f(x)$ au point de la courbe d'abscisse a, puis les tangentes à la courbe passant par le point B dans les cas suivants :

(1) $f(x) = 3x^2 - 4x + 2$, $a = 1$, $B(-1, -3)$

(2) $f(x) = \frac{3x-5}{x-2}$, $a = -1$, $B(0, 3)$

Exercice 4. Étudier les fonctions suivantes :

(1) $(x \mapsto \frac{x^3}{x^2-3})$

(2) $(x \mapsto \ln(x-1) + \ln(x+1))$

(3) $(x \mapsto \sqrt{\frac{\ln(|x|)}{x}})$

(4) $(x \mapsto \frac{\tan(2x)}{\tan(x)})$

(5) $(x \mapsto \sin(3x) + 3\sin(x))$

Exercice 5. ** On définit la fonction $f : \left(x \mapsto \frac{3}{5}x + \frac{4}{5}\sqrt{|4-x^2|}\right)$.

(1) Déterminer le domaine de définition de f.

(2) Étudier la continuité et la dérivabilité de f, puis dresser son tableau de variation.

(3) Étudier la dérivabilité de f aux points délicats à l'aide du taux d'accroissement et en déduire l'équation des demi-tangentes à droite et à gauche en ces points.

(4) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x) - \frac{7}{5}x$. En déduire le comportement de f en $+\infty$.

(5) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x) + \frac{1}{5}x$. En déduire le comportement de f en $-\infty$.

Exercice 6. Soient I, J des intervalles de $\mathbb{R}$. Soit f une fonction continue, bijective de I dans J, strictement croissante sur I. Montrer que sa fonction réciproque f^{-1} est aussi strictement croissante.

Exercice 7. Étudier la parité et la périodicité des fonctions suivates : $f(x) = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$, $g(x) = e^{\cos(x)}$.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application. À partir du graphe de f expliquer comment obtenir le graphe des applications

(1) $g : (x \mapsto f(a-x))$
(2) $h : (x \mapsto f(x-a))$
(3) $k : (x \mapsto f(x)-a)$
(4) $\ell : (x \mapsto a-f(x))$

Exercice 9. Sans calcul de dérivée, tracer le graphe des applications suivantes :

(1) $f : (x \mapsto |3x-2|-2|x+1|)$
(2) $g : (x \mapsto \sqrt{3x-2}-1)$
(3) $h : (x \mapsto \frac{4}{2x+1}+3)$

Exercice 10. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On suppose que $f \circ f$ est une application croissante sur $\mathbb{R}$ et que $f \circ f \circ f$ est une application strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Montrer que f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11. Déterminer la période de l'application $f : (x \mapsto \cos(\frac{x}{5}) + \sin(\frac{x}{3}))$.

Exercice 12. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f, g deux fonctions définies sur I. Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse (la prouver si elle est vraie, trouver un contre-exemple si elle est fausse).

(1) Si f et g sont croissantes sur I alors $f \times g$ est croissante sur I.
(2) Si f et g sont croissantes et positives sur I alors $f \times g$ est croissante et positive sur I.
(3) Si f et g sont majorées sur I alors $f+g$ est majorée sur I.
(4) Si f et g sont majorées sur I alors $f \times g$ est majorée sur I.
(5) Si f et g sont bornées sur I alors $f \times g$ est bornée sur I.

Exercice 13. Soient I, J des intervalles de $\mathbb{R}$ et $f : I \to J$ une application. Écrire avec des quantificateurs les définitions :

(1) f est injective
(2) f est surjective
(3) f est surjective.

Exercice 14. Prouver que la composée de deux fonctions injectives (resp. surjective) est injective (resp. surjective).

Exercice 15. Soit $f : (x \mapsto e^{\frac{1}{x}})$. Prouver que f est bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans un intervalle à déterminer et exprimer $(f^{-1})'$ en fonction de f^{-1} là où f^{-1} est dérivable.

Exercice 16. Prouver qu'un produit de deux fonctions bornées est borné.

Exercice 17. Par reconnaissance de dérivées, déterminez une primitive des fonctions suivantes :

(1) $2x^{27} + x^3 + 4x + 5$,
(2) $\sin(2t + \pi/5)$,
(3) $1 - 2e^t$,
(4) $\frac{3x^2}{4x^3+1}$,
(5) $\frac{e^x+1}{e^x+x}$,
(6) $\frac{1}{\sqrt{3x+1}}$,
(7) $\frac{2t}{\sqrt{1+t^2}}$,
(8) $\frac{\sin(x)}{\cos(x)^4}$,
(9) $\frac{9x^2+1}{(3x^3+x+1)^3}$,
(10) $x^2 \exp(x^3)$,
(11) $\frac{e^x}{e^x+4}$,
(12) $\cos(5x + 3)$,
(13) $x \cos(3x^2)$,
(14) $\frac{1}{x^n}$, $(n \in \mathbb{N}^*)$
(15) $\tan(x)$,
(16) $\frac{1}{\tan(x)}$