TD 7 : Nombres complexes (2)

Exercice 1.

(1) Déterminer tous les $z \in \mathbb{C}$ tels que $A(1)$, $M(z)$ et $N(z^2)$ soient alignés.

(2) Déterminer tous les $z \in \mathbb{C}$ tels que $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ soient orthogonaux.

(3) Déterminer tous les $z \in \mathbb{C}$ tels que le triangle AMN soit équilatéral direct.

Exercice 2. *Linéariser/Développer.* Soit $x \in \mathbb{R}$.

(1) Linéariser $\cos(x)^3$ (exprimer à l'aide de $\cos(kx)$ et de $\sin(kx)$, où $k \in [\![0, 4]\!]$, sans puissance).

(2) Développer $\sin(4x)$ (exprimer à l'aide de $\cos(x)$ et $\sin(x)$ uniquement, avec des puissances).

Exercice 3. Soient a, b, c des nombres complexes deux-à-deux distincts et A, B, C les points du plan associés.

(1) Exprimer en fonction de a, b, c la longueur AB et l'angle $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$.

(2) Déterminer l'affixe de I, le milieu de $[AB]$.

(3) Déterminer l'équation du cercle de diamètre $[AB]$.

(4) Déterminer une relation faisant intervenir z et $\bar{z}$ permettant de caractériser les points $M(z)$ appartenant à la médiatrice de $[AB]$.

Exercice 4. Résoudre les équations :

(1) $z^2 = z + 1$

(2) $z^2 = z - 1$.

(3) $z^2 + 2z + 5 = 0$

(4) $z^2 - \sqrt{3}z + 31 = 0$

(5) $z^3 + 1 = 0$

(6) $z^4 - 1 = 0$

(7) $(z^2 - 6z + 10)(z^2 + 6z + 10) = 0$.

Exercice 5. On considère l'équation $E : z^3 + (2 - 2i)z^2 + (5 - 4i)z - 10i = 0$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$.

(1) Montrer que E admet une solution imaginaire pure.

(2) Résoudre E. (On sait que pour un polynôme P, si $P(z_0) = 0$ alors le polynôme P se factorise par $z - z_0$).

Exercice 6. On considère l'équation $E : z^4 - 2z^3 - z^2 - 2z + 1 = 0$.

(1) Vérifier que E est équivalente au système : $Z = z + \frac{1}{z}$ et $Z^2 - 2Z - 3 = 0$.

(2) Résoudre E.

Exercice 7. Calculer les racines carrées de

$$a = 1 - j\,, \qquad b = \frac{1-i}{\sqrt{3}-i}\,, \qquad c = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}}\,.$$

Exercice 8. Rechercher tous les couples $(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ satisfaisant les conditions

$$\begin{cases} z_1 z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ z_1 + 2z_2 = \sqrt{3} \end{cases}$$

Exercice 9. Déterminer le module et l'argument des complexes suivants :

$$a = \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{30}\,, \qquad b = \frac{1}{1+i\tan\theta}\,, \quad \text{pour } \theta \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\,, k \in \mathbb{Z}\right\}\,,$$

$$c = \left(1 + e^{i\theta}\right)^n\,, \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}\,,\ \theta \in \mathbb{R}\,; \quad d = \cos a + i \sin a + j\,, \quad \text{pour } a \in \mathbb{R}\,.$$

Exercice 10. Mettre sous forme trigonométrique chacun des nombres complexes suivants :

$$a = (1+i)^6\,, \quad b = \frac{(1+i)^2}{(1-i)^3}\,, \quad c = \left(\frac{i\sqrt{2}}{1+i}\right)^{57}\,, \quad d = (2\sqrt{3} - 2i)^4\,, \quad e = \frac{(1+i\sqrt{3})^7}{(1-i\sqrt{3})^{12}}$$

Exercice 11. Soit $\theta \in \mathbb{R}$, notons $a = -\sin(2\theta) + 2i\cos^2(\theta)$. Déterminer θ pour que $|a| = |1-a|$.

Exercice 12. Déterminer les entiers naturels n tels que $(i\sqrt{3}+1)^n$ soit réel.

Exercice 13. On note $\beta = e^{\frac{2i\pi}{7}}$, $A = \beta + \beta^2 + \beta^4$ et $B = \beta^3 + \beta^5 + \beta^6$.

(1) Montrer que A et B sont conjugués.

(2) Montrer que $\mathrm{Im}(A) > 0$.

(3) Calculer $A + B$ et AB. En déduire les valeurs de A et B.

Exercice 14. Calculer, selon les valeurs de $n \in \mathbb{N}$, i^n.

Exercice 15. Déterminer et représenter graphiquement l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie

(1) $\arg(z) = \frac{\pi}{4}[2\pi]$ (2) $\arg(-2z) = \frac{\pi}{2}[\pi]$ (3) $\arg \bar{z} = \frac{\pi}{3}[\pi]$

Exercice 16. Linéariser en utilisant les formules d'Euler les expressions suivantes (où $x \in \mathbb{R}$) :

(1) $\cos(x)^3$

(2) $\sin(x)^3$

(3) $\cos(x)^4$.

(4) $\cos(x)^2\sin(x)$

(5) $\cos(x)\sin(x)^3$

(6) $\cos(2x)\sin(3x)$

Exercice 17. Développer :

(1) $\cos(3x)$

(2) $\sin(4x)$.

Exercice 18. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

(1) Factoriser le nombre complexe $1 - e^{i\alpha}$ par $e^{i\frac{\alpha}{2}}$.

(2) Soit $x \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ et $S = 1 + \cos(x) + \cos(2x) + ... + \cos(nx)$, $T = \sin(x) + \sin(2x) + ... + \sin(nx)$. Calculer $S + iT$. En déduire une factorisation de S et de T.

Exercice 19. Soit α un réel ($\alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$). Exprimer en fonction de $\tan(\alpha)$ et $\cos(\alpha)$ les nombres : $\frac{e^{2i\alpha}-1}{e^{2i\alpha}+1}$; $e^{4i\alpha} + 2e^{2i\alpha} + 1$.

Exercice 20. Déterminer l'ensemble des points d'affixe z tels que $|z| = \left|\frac{1}{z}\right| = |1 - z|$.

Exercice 21.

Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que

(a) $(1 + i)^n \in \mathbb{R}$,

(b) $(\sqrt{3} + i)^n \in i\mathbb{R}$,

(c) $(\sqrt{3} - i)^n \in \mathbb{R}^-$.

Exercice 22. Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^2$. Montrer que $|a| + |b| \leqslant |a + b| + |a - b|$. Préciser le cas d'égalité.

Exercice 23. En considérant le produit uv où $u = e^{\frac{i\pi}{3}}$ et $v = e^{\frac{-i\pi}{4}}$, déterminer les valeurs de $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$.

Exercice 24. Soit $u \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$. Montrer que

$$(\forall z \in \mathbb{C}\,,\ \frac{z - u\bar{z}}{1 - u} \in \mathbb{R}) \quad \Leftrightarrow \quad |u| = 1\,.$$

Géométrie

Exercice 25. Soient les points A, B, C et D d'affixes respectives : $a = -1$, $b = 3$, $c = 1 + 2i\sqrt{3}$, $d = 7$. Étudier la nature des triangles ABC et ACD.

Exercice 26. Les points A, B, M et M' du plan complexe ont pour affixes respectives $a = -3i\,, \qquad b = 4 + i\,, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \{4 + i\}\,, \qquad z' = \frac{z+3i}{z-4-i}\,.$

(1) Déterminer l'ensemble des points M tels que :

(a) M' est sur l'axe réel

(b) M' est sur l'axe imaginaire.

(2) Déterminer l'ensemble des points M tels que M' soit sur le cercle de centre $\Omega(1)$ et de rayon $\sqrt{2}$.

Exercice 27. Soient A et B deux points du plan complexe d'affixes 2 et $2+i$. Déterminer l'affixe des points suivants :

(1) l'image D de A par la translation de vecteur $\overrightarrow{OB}$,

(2) l'image E de B par le quart de tour direct de centre O,

(3) l'image F de B par la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$,

(4) le point G tel que ABG soit équilatéral direct.

Exercice 28. On se donne deux nombres strictement positifs r et R tels que $0 < r \leqslant R$. Soit $A(r,R) = \{u+v \in \mathbb{C} \,|\, |u| = R\,,\ |y| \leqslant r\} \subset \mathbb{C}$.

(1) Montrer que, pour tout $z \in A(r,R)$, on a $R - r \leqslant |z| \leqslant R + r$.

(2) Décrire géométriquement $A(r,R)$.

(3) Mêmes questions pour $A'(r,R) = \{u+v \,|\, |u| = R\,,\ |v| = r\}$.

Exercice 29. Soit $ABCD$ un rectangle direct tel que $AB = 2AD$. Déterminer les relations reliant les affixes respectifs des sommets A, B, C, D.

Exercice 30. *

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe. Soient P, Q, R et S les quatre points tels que APB, BQC, CRD et DSA soient quatre triangles rectangles isocèles (en P, Q, R et S) extérieurs au quadrilatère. Montrer que $PR = QS$ et que PR est orthogonal à QS. Montrer que $PQRS$ est un carré si et seulement si $ABCD$ est un parallélogramme.

Exercice 31. *

Soient A, B, C trois points non alignés du plan affine euclidien orienté E, tels que ABC est un triangle direct.

Soit P, Q, R les points de E tel que BCP, CAQ, ABR sont équilatéraux indirect.

(1) Soient G, I, J, K les centres de gravité des
triangles
ABC, BCP, CAQ et ABR.

(a) Exprimer les affixes de I, J et K en fonction de celles de A, B et C et de $j = e^{2i\pi/3}$.

(b) Montrer que G est le centre de gravité du triangle IJK.

(c) Montrer que IJK est équilatéral.

(2) Montrer que $AP = BQ = CR$