TD - Logique et Ensembles

BCPST 1 | Feuille d'exercice | Année 2022- 2023

Logique

Exercice 1 : *(Apprentissage)* Traduire les assertions suivante sous forme mathématique. Sont elles vraies ou fausses ?
1) Pour tout réel x, x^2 est positif
2) Il existe un unique réel x tel que x est strictement supérieur à 1 et $x^2 = 2$
3) Pour tout réel x, si x est strictement positif alors $\frac{1}{x}$ est strictement positif
4) Il existe un entier naturel n, tel que pour tout entier naturel m, $m + n = 0$ si et seulement si $m = 0$
5) si x appartient à A ou à B alors x est un nombre entier naturel pair.

. . . .

Réponses : **1)** $\forall x \in \mathbb{R}$, $x^2 \geq 0$. Elle est vraie. **2)** $\exists ! x \in \mathbb{R} \mid x > 1$ et $x^2 = 2$. Elle est vraie.
3) $\forall x \in \mathbb{R}$, $x > 0 \implies \frac{1}{x} > 0$. Elle est vraie **4)** $\exists n \in \mathbb{N} \mid \forall m \in \mathbb{N}$, $m + n = 0 \iff m = 0$ Elle est vraie
5) $x \in A \cup B \implies \exists p \in \mathbb{N} \mid x = 2p$.

Exercice 2 : *(En 1 minute)* Ecrire la négation des assertions suivantes. Sont elles vraies ou fausses ?
1) $\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ x = 1$ **2)** $\exists x \in \mathbb{R} \mid x = 1$ **3)** $\forall x > 0\ ,\ x = 1$ ou $2x \leq 3$
4) $\exists x > 0 \mid x = 1$ ou $2x \leq 3$ **5)** $\forall x \in [0, 2]\ ,\ x \in [0, 1[\cup [1, 2]$ **6)** $\forall x \in [\![1, n]\!]\ ,\ \exists y \in [\![1, n]\!] \mid x + y = n$
7) $\exists x \in \mathbb{N} \mid x \neq 0$ et $\forall n \in [\![0, x]\!]\ ,\ n = n^2$ **8)** $\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ x < 0 \implies x^2 \leq 0$
9) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N\ ,\ \frac{1}{n} \leq \varepsilon$

. . . .

Réponses : **1)** $\exists x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1$ La négation est vraie (donc la proposition initiale est fausse).
2) $\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ x \neq 1$ La négation est fausse.
3) $\exists x > 0 \mid x \neq 1$ et $2x > 3$ La négation est vraie. (On prend $x = 2$)
4) $\forall x > 0\ ,\ x \neq 1$ ou $2x > 3$ La négation est fausse.
5) $\exists x \in [0, 2] \mid x \notin [0, 1[\cup [1, 2]$ La négation est fausse car $[0, 1[\cup [1, 2] = [0, 1]$.
6) $\exists x \in [\![1, n]\!] \mid \forall y \in [\![1, n]\!]\ ,\ x + y \neq n$ La négation est vraie, en effet on peut choisir $x = n$ on a alors $x + y > n$ pour tout $y \in [\![1, n]\!]$. **7)** $\forall x \in \mathbb{N}\ ,\ x = 0$ ou $\exists n \in [\![0, x]\!] \mid n \neq n^2$ La négation est fausse. La proposition originale est vraie en effet, on prend $x = 1$, on a alors $\forall n \in [\![0, 1]\!]\ ,\ n^2 = n$.
8) $\exists x \in \mathbb{R} \mid x < 0$ et $x^2 > 0$. la négation est vraie. En effet, on prend $x = -1$.
9) $\exists \varepsilon > 0, \forall N \in \mathbb{N} \mid \exists n \geq N\ ,\ \frac{1}{n} > \varepsilon$. La proposition originale est vraie. Celle ci est un peu compliquée à comprendre mais en gros, si $\epsilon > 0$ est fixé, on prend $N \in \mathbb{N}$ tel que $N > \frac{1}{\varepsilon}$. On a alors $\forall n \geq N$, $n \geq \frac{1}{\varepsilon}$ et donc $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$.

Exercice 3 : *(Réciproques et contraposées)* Ecrire la réciproque, la contraposée puis la négation de chacune de ces implications. Préciser si elles sont vraies ou fausses.
1) $\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \frac{1}{x} = 1 \implies x = 1$ **2)** $\forall \theta \in \mathbb{R}\ ,\ \cos(\theta) = 1 \implies \exists k \in \mathbb{Z} \mid \theta = 2k\pi$
3) $\forall n \in \mathbb{N}\ , (\exists p \in \mathbb{N} \mid n = 2p) \implies (\exists p' \in \mathbb{N} \mid n = 4p')$

. . . .

Réponses : **1)** $\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \frac{1}{x} = 1 \implies x = 1$ Réciproque : $\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ x = 1 \implies \frac{1}{x} = 1$
Contraposée : $\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ x \neq 1 \implies \frac{1}{x} \neq 1$ Négation : $\exists x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{x} = 1$ et $x \neq 1$
La proposition initiale et sa contraposée sont vraies. la négation est fausse (si $\frac{1}{x} = 1$ alors $\frac{x}{x} = x = 1$). La

réciproque est vraie aussi.

2) $\forall \theta \in \mathbb{R}\ ,\ \cos(\theta) = 1 \implies \exists k \in \mathbb{Z} \mid \theta = 2k\pi$ Réciproque : $\forall \theta \in \mathbb{R}\ ,\ \exists k \in \mathbb{Z} \mid \theta = 2k\pi \implies \cos(\theta) = 1$
Contraposée : $\forall \theta \in \mathbb{R}\ ,\ \forall k \in \mathbb{Z}\ ,\ \theta \neq 2k\pi \implies \cos(\theta) \neq 1$
Négation : $\exists \theta \in \mathbb{R}\ ,\ \cos(\theta) = 1$ et $\forall k \in \mathbb{Z} \mid \theta \neq 2k\pi$
La proposition initiale et sa contraposée sont vraies. La négation est fausse. La réciproque est vraie aussi.

3) $\forall n \in \mathbb{N}\ ,(\exists p \in \mathbb{N} \mid n = 2p) \implies (\exists p' \in \mathbb{N} \mid n = 4p')$
Réciproque : $\forall n \in \mathbb{N}\ ,(\exists p' \in \mathbb{N} \mid n = 4p') \implies (\exists p \in \mathbb{N} \mid n = 2p)$
Contraposée : $\forall n \in \mathbb{N}\ ,(\forall p' \in \mathbb{N}\ ,\ n \neq 4p') \implies (\forall p \in \mathbb{N}\ ,\ n = 2p)$
Négation : $\exists n \in \mathbb{N}\ ,(\exists p \in \mathbb{N} \mid n = 2p)$ et $(\forall p' \in \mathbb{N} \mid n \neq 4p')$
La négation est vraie, en effet on peut prendre $n = 2$ on a alors n qui n'est pas divisible par 4 donc $n \neq 4p'$. Donc la proposition et sa contraposée sont fausses. La réciproque est vraie, en effet si $n = 4p'$ alors $n = 2(2p') = 2p$ avec $p = 2p' \in \mathbb{N}$.

<u>Exercice 4</u> : *(Equivalences)*
1) Montrer que les équivalences suivantes sont vraies :
. 1.a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^3 = 1 \iff x = 1$. 1.b) $\forall n \in \mathbb{N}, (\exists p \in \mathbb{N} \mid n = 2p) \iff (\exists p' \in \mathbb{N} \mid n^2 = 2p')$
. 1.c) $\forall x \in \mathbb{R}\ , x \geq 0 \iff \sqrt{x^2} = x \iff |x| = x$
2) Ecrire la négation de la proposition "$A \iff B$"
. . . .

Réponses : **1)** . 1.a) $\boxed{\Longleftarrow]}$ est simple car $x = 1$ donne directement $x^3 = 1$.
$\boxed{\implies]}$ est plus compliqué. Une justification rapide est de dire que la fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et donc bijective, elle admet donc une unique solution au maximum pour l'équation $x^3 = 1$. Comme $x = 1$ est une solution évidente, c'est la seule possible donc $x = 1$.

Autre méthode : $x^3 = 1 \implies x^3 - 1 = 0$ on trouve un polynôme de racine évidente egale à 1. On peut donc factoriser par $x-1$: $x^3 - 1 = (x-1)(x^2 - x + 1)$ et comme $x^2 - x + 1$ a un discriminant négatif, il ne s'annule pas. Ainsi $x^3 - 1 = 0 \implies (x-1)(x^2 - x + 1) = 0 \implies x - 1 = 0 \implies x = 1$.

. 1.b) $\boxed{\implies]}$ Si $n = 2p$ alors $n^2 = 4p^2 = 2(2p^2)$. On pose donc $p' = 2p^2$.
$\boxed{\Longleftarrow]}$ Si $n^2 = 2p'$ est pair alors si on avait $n = 2p + 1$, on aurait $n^2 = 4p^2 + 4p + 1$ est impair. C'est donc incompatible. On a donc n pair.
. 1.c) $\boxed{(1) \implies (2)}$ si $x \geq 0$ alors $\sqrt{x^2}^2 = x^2$ donc $\sqrt{x^2} = x$ $\boxed{(2) \implies (3)}$ $\sqrt{x^2} = |x| = x$
$\boxed{(3) \implies (1)}$ si $x < 0$ alors $|x| = -x \neq x$ c'est impossible donc $x \geq 0$.

2) $A \iff B = (A$ et $B)$ ou $(\neg A$ et $\neg B)$ donc :
$\neg(A \iff B) = \neg(A$ et $B)$ et $\neg(\neg A$ et $\neg B) = \boxed{(\neg A \text{ ou } \neg B) \text{ et } (A \text{ ou } B)}$.

Ensembles

<u>Exercice 5</u> : *(En 1 minute)* A et B sont deux sous ensembles de E. Simplifier les ensembles suivant :
1) $A \cap B \cap A$ **2)** $(A \cup B) \cap B$ **3)** $(A \cup B) \cap (B \cup A)$ **4)** $\overline{A} \cup (B \cap A)$ **5)** $\overline{A \cap B} \cup A \cup B$
6) $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \cap \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$ **7)** $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cap \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i}$ **8)** $(B \cap \overline{A}) \cup A \cup B$
. . . .

Réponses : **1)** $A \cap B \cap A = \boxed{A \cap B}$ **2)** $(A \cup B) \cap B = \boxed{\text{B}}$ car $B \subset A \cup B$
3) $(A \cup B) \cap (B \cup A) = \boxed{B \cup A}$ **4)** $\overline{A} \cup (B \cap A) = (B \cup \overline{A}) \cap (A \cup \overline{A}) = (B \cup \overline{A}) \cap E = \boxed{B \cup \overline{A}}$
5) $\overline{A \cap B} \cup A \cup B = \overline{A} \cup \overline{B} \cup A \cup B = \boxed{E}$

6) $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \cap \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i} = A_1 \cap \overline{A_1} = \emptyset$ donc $\boxed{\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cap \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i} = \emptyset}$. **7)** $\bigcup_{i=1}^{n} A_i \cap \bigcap_{i=1}^{n} \overline{A_i} = \bigcup_{i=1}^{n} A_i \cap \overline{\bigcup_{i=1}^{n} A_i} = \boxed{\emptyset}$

8) $(B \cap \overline{A}) \cup A \cup B = (B \cup A \cup B) \cap (\overline{A} \cup A \cup B) = (B \cup A) \cap E = \boxed{B \cup A}$

Exercice 6 : *(En 1 minute)* Calculer l'intersection et l'union de ces ensembles :
1) $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{3, 4\}$ **2)** $A = [0, 1]$ et $B = [-1, 1[$ **3)** $A = [\![-1, n]\!]$ et $B = \mathbb{N}$
4) $A = [1, 2]$ et $B =]-\infty, 1[\cup[2, +\infty[$

....

Réponses : **1)** $A \cup B = [\![1, 4]\!]$ et $A \cap B = \{3\}$ **2)** $A \cup B = [-1, 1]$ et $A \cap B = [0, 1[$
3) $A \cup B = [\![-1, +\infty[\![$ et $A \cap B = [\![0, n]\!]$ **4)** $A \cup B = \mathbb{R}$ et $A \cap B = \{2\}$

Exercice 7 : ★ Pour chaque ensemble, dire si les éléments a, b, c appartiennent ou pas à l'ensemble.
1) $E = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$, $a = -1$, $b = 4$, $c = 12$ **2)** $E = \{x^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$, $a = -1$, $b = 4$, $c = 12$
3) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 > x\}$, $a = -1$, $b = 4$, $c = \frac{1}{2}$
4) $E = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists m \in \mathbb{N}, mn = 6\}$, $a = 2$, $b = -6$, $c = 5$
5) $E = \{F \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mid 5 \in F\}$, $a = 5$, $b = \{3, 5\}$, $c =]-\infty, 5[$.
6) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > y\}$, $a = (5, 6)$, $b = 2$, $c = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
7) $E = \{(A, B) \in \mathcal{P}(\mathbb{N})^2 \mid A \cap B \neq \emptyset\}$, $a = ([\![1, 6]\!], [\![6, 9]\!])$, $b = (\{1, 5, 37\}, \{3, 6, 29\})$, $c = ([1, 3], [2, +\infty[)$.

....

Réponses : **1)** $a = -1 \notin E$ car E ne contient que positifs. $b = 4 = 2^2 \in E$ car $2 \in \mathbb{N}$
Enfin $c = 12 = \sqrt{12}^2 \notin E$ car $\sqrt{12} \notin \mathbb{N}$.
2) $a = -1 \notin E$ car E ne contient que positifs. $b = 4 = 2^2 \in E$ car $2 \in \mathbb{R}$
Enfin $c = 12 = \sqrt{12}^2 \in E$ car $\sqrt{12} \in \mathbb{R}$.
3) $a = -1 \in E$ car $(-1)^2 > -1$ $b = 4 \in E$ car $2^2 > 2$ Enfin, $c \notin E$ car $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \leq c = \frac{1}{2}$
4) $a = 2 \in E$ car $3a = 6$ $b = -6 \notin E$ car $b \notin \mathbb{N}$ $c \notin E$ car $\frac{6}{c} = \frac{6}{5} \notin \mathbb{N}$.
5) $a = 5 \notin E$ car $a \notin P(\mathbb{R})$, $b = \{3, 5\} \in E$ car $5 \in b$ $c =]-\infty, 5[\notin E$ car $5 \notin c$.
6) $a = (5, 6) \in E$ car $5^2 + 6^2 > 6$ $b = 2 \notin E$ car $b \notin \mathbb{R}^2$ $c = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \notin E$ car $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \geq \frac{1}{2}$.
7) $a = ([\![1, 6]\!], [\![6, 9]\!]) \in E$ car $[\![1, 6]\!], [\![6, 9]\!] = \{6\} \neq \emptyset$
$b = (\{1, 5, 37\}, \{3, 6, 29\}) \notin E$ car $\{1, 5, 37\} \cap \{3, 6, 29\} = \emptyset$ $c = ([1, 3], [2, +\infty[) \notin E$ car $c \notin P(\mathbb{N})^2$.

Exercice 8 : Pour chaque paire d'ensembles ci dessous, dire si l'un est inclus dans l'autre, s'ils sont égaux ou rien de tout ça.
1) $E = \mathbb{R}$ et $F = \{x^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$ **2)** $E = [\![1, 3]\!]$ et $F = \left\{n \in \mathbb{N}^* \mid \frac{1}{n} < \frac{1}{2}\right\}$
3) $E = \mathbb{N}$ et $F = \{2p \mid p \in \mathbb{N}\} \cup \{2p + 1 \mid p \in \mathbb{N}\}$ **4)** $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 1\}$ et $F = \{y \in \mathbb{R} \mid y^3 \leq 1\}$
5) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid \exp x \geq 1\}$ et $F = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 1\}$
6) $E = [0, 2]^2$ et $F = [0, 1]^2$ **7)** $E = [0, 2]^2$ et $F = [0, 1]^2 \cup [1, 2]^2$
8) Si $B \subset A$, $E = P(A)$ et $F = P(B)$

....

Réponses : **1)** $F \subset E$ car pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x^2 \in \mathbb{R} = E$

2) $1 \in E$ et $1 \notin F$. Par ailleurs $4 \in F$ et $4 \notin E$ donc pas de lien entre E et F.

3) $\boxed{E = F}$ en effet : $n \in E \iff n \in \mathbb{N} \iff n$ est pair ou n est impair
$\iff n \in \{2p \mid p \in \mathbb{N}\}$ ou $n \in \{2p + 1 \mid p \in \mathbb{N}\} \iff n \in F$.

4) $\boxed{F \not\subset E}$ car $-2 \in F$ et $-2 \notin E$

$\boxed{E \subset F}$: $x \in E \implies x^2 \leq 1 \implies |x| \leq 1 \implies -1 \leq x \leq 1 \underbrace{\implies}_{(*)} (-1)^3 \leq x^3 \leq 1^3 \implies x^3 \leq 1 \implies x \in F$.

(*) car $x \mapsto x^3$ est strictement croissante.

5) $\boxed{F \subset E}$ car $(x, y) \in F \implies (x, y) \in [0,1]^2 \implies x \in [0,1]$ et $y \in [0,1] \implies x \in [0,2]$ et $y \in [0,2]$ $\implies (x, y) \in [0,2]^2 \implies (x, y) \in E$. $\boxed{F \not\subset E}$ car $(2,2) \in E$ et $(2,2) \notin F$

6) On a $-1 \in F$ et $-1 \notin E$ car $e^-1 < 1$ donc $F \not\subset E$. On a $2 \in E$ car $e^2 \geq 1$ et $2 \notin F$ donc $E \not\subset F$.

Autre méthode : $x \in E \iff e^x \geq 1 \iff x \geq \ln 1 \iff x \geq 0 \iff x \in \mathbb{R}_+$ ainsi $E = \mathbb{R}_+$.
De même, $x \in F \iff x^2 \leq 1 \iff x \in [-1, 1]$ ainsi $F = [-1, 1]$. $\boxed{\text{Donc } E \not\subset F \text{ et } F \not\subset E}$.

7) $\boxed{F \subset E}$ car $(x, y) \in F \implies (x, y) \in [0,1]^2 \cup [1,2]^2 \implies (x \in [0,1]$ et $y \in [0,1])$ ou $(x \in [1,2]$ et $y \in [1,2])$ $\implies x \in [0,2]$ et $y \in [0,2] \implies (x, y) \in [0,2]^2 \implies (x, y) \in E$. mais $(0,2) \in E$ et $(0,2) \notin F$ donc $\boxed{F \not\subset E}$

8) $X \in P(B) \implies X \subset B \implies X \subset A \implies X \in P(A)$. Donc $\boxed{P(B) \subset P(A)}$.
Pour l'autre inclusion, il faut distinguer deux cas : 1er Cas : Si $A = B$ on a évidement $P(A) = P(B)$
2e Cas : Sinon, on a alors pour $a \in A \backslash B$, $\{a\} \in P(A)$ et $\{a\} \notin P(B)$ donc $\boxed{P(A) \not\subset P(B)}$.

Raisonnement

Exercice 9 : *(Récurrence)*
1) On pose $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $u_{n+1} = u_n + 1$. Montrer que $u_n = n$.
2) On pose $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $u_{n+1} = 2u_n$. Montrer que $u_n = 2^n$.
3) On pose $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n}$. Calculer u_{2n} et u_{2n+1}.
4) On pose $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{1+u_n}$. Montrer que la suite est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N},\ , u_n \leq 1$
5) On pose $u_n = 1 + 2 + \ldots + n$ et $v_n = 1 + 2^3 + \ldots + n^3$. Montrer que $v_n = u_n^2$

....

Réponses : **1)** Initialisation : $u_0 = 0$ est vrai. Hérédité : Si c'est vrai au rang n alors au rang $n+1$ on a $u_{n+1} = u_n + 1 = n+1$ par hypothèse de récurrence. Donc la proposition au rang $n+1$ est vraie. Conclusion : la proposition est vraie pour tout $n \geq 0$
2) Initialisation : $u_0 = 1 = 2^0$ est vrai. Si c'est vrai au rang n alors au rang $n+1$ on a $u_{n+1} = 2u_n = 2^{n+1}$ par hypothèse de récurrence. Donc la proposition au rang $n+1$ est vraie. Conclusion : la proposition est vraie pour tout $n \geq 0$
3) On remarque en calculant les premiers termes $u_0 = u_2 = u_4 = 2$ et $u_1 = u_3 = \dfrac{1}{2}$. On montre par récurrence que $u_{2p} = 2$ et $u_{2p+1} = \dfrac{1}{2}$. Si $p = 0$ c'est vrai. Si c'est vrai au rang p alors on a $u_{2(p+1)} = u_{2p+2} = \dfrac{1}{u_{2p+1}} = \dfrac{1}{1/2} = 2$ par hypothèse de récurrence. Et $u_{2p+3} = \dfrac{1}{u_{2p+2}} = \dfrac{1}{2}$. C'est donc vrai au rang $p+1$. Conclusion, c'est vrai pour tout $p \in \mathbb{N}$.
4) Il faut être plus précis et montrer par récurrence que $0 \leq u_n \leq 1$. Initialisation : on a bien $0 \leq u_0 \leq 1$. Hérédité : Si c'est vrai au rang n alors $1 \leq 1 + u_n \leq 2$ et $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{1+u_n} \leq 1$ donc $0 \leq u_{n+1} \leq 1$. C'est donc vrai au rang $n+1$. Conclusion : la proposition est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$
5) Initialisation : $u_1^2 = 1^2 = 1 = 1^3 = v_1$, c'est bon. Hérédité : si c'est vrai au rang n alors :
$u_{n+1}^2 = (u_n + n + 1)^2 = u_n^2 + 2(n+1)u_n + (n+1)^2 = v_n + 2(n+1)\dfrac{n(n+1)}{2} + (n+1)^2 = v_n + (n+1)^2 \times (n+1)$
$= v_n + (n+1)^3 = v_{n+1}$ c'est donc vrai au rang $n+1$.

Exercice 10 : *(Disjonction de cas)*
1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = 1 + (-1)^n$. Montrer que $u_n \in \{0, 2\}$.
2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, Montrer que $\sqrt{x^2} = |x|$.
3) Pour $x, y \in \mathbb{R}$, Montrer que $|xy| = |x||y|$
4) Pour $x, y \in \mathbb{R}$, Montrer que $|x+y| \leq |x| + |y|$
5) Pour $x \in \mathbb{R}_+$, montrer que $\sin x \leq x$

....

Réponses : **1)** Si n est pair alors $u_n = 1 + 1 = 2$ et si n est impair alors $u_n = 1 - 1 = 0$ donc $u_n \in \{0, 2\}$
2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ Si $x \in \mathbb{R}_+$ alors on sait déjà que $\sqrt{x^2} = x = |x|$ car c'est l'application réciproque.
Si $x < 0$ alors $|x| = -x \in \mathbb{R}_+$ par définition donc $\sqrt{(-x)^2} = -x = |x| = \sqrt{(-1)^2 x^2} = \sqrt{x^2}$ d'où le résultat.
3) Pour $x, y \in \mathbb{R}$, Montrer que $|xy| = |x||y|$
si x et y ont le même signe alors $|xy| = |x||y|$.
Sinon, supposons $x > 0$ et $y < 0$, alors $xy < 0$ donc $|xy| = -xy = x|y| = |x||y|$.
4) Pour $x, y \in \mathbb{R}$, Montrer que $|x+y| \leq |x| + |y|$
si x et y ont le même signe alors $|x+y| = |x| + |y|$.
Sinon, supposons $x > 0$ et $y < 0$.
Premier cas : si $x + y > 0$ alors $|x+y| = \underbrace{x + y < x + (-y)}_{\text{car } y < -y} = |x| + |y|$.
Deuxième cas : si $x + y < 0$ alors $|x+y| = \underbrace{-x - y < x + (-y)}_{\text{car } -x < x} = |x| + |y|$.

5) Pour $x \in \mathbb{R}_+$, montrer que $\sin x \leq x$. Si $x \geq 1$ alors on a bien $sin(x) \leq 1 \leq x$. Sinon, on étudie la fonction $f(x) = x - \sin x$ sur $[0,1]$ et on vérifie qu'elle est positive. On a $f'(x) = 1 - cos(x) \geq 0$ donc f est croissante sur $[0,1]$ et comme $f(0) = 0$ on obtient $f(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$. Cela donne $\sin x \leq x$.

Exercice 11 : *(Analyse-Synthèse)*
1) On a une suite (u_n) qui vérifie la relation de récurrence $u_{n+1} = 5u_n + 2n$. Trouver une suite de la forme $u_n = an + b, a, b \in \mathbb{R}$ qui vérifie cette relation.
2) Trouver trois réels $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, \dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{n+2}$
3) Pour tout $y \in [-1,1]$, montrer qu'il existe un unique $x \in [0,1]$ tel que $\sqrt{1-x^2} = y$.
4) Trouver trois réels $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^3 - 1 = (n-1)(an^2 + bn + c)$
. . . .

Réponses : **1)** On suppose que $u_n = an + b$ vérifie la relation de récurrence. On a alors l'equation suivante : $a(n+1) + b = 5an + 5b + 2n \iff an + a + b = (5a+2)n + 5b$ Pour que cela fonctionne, il suffit donc de résoudre : $\begin{cases} a = 5a + 2 \\ a + b = 5b \end{cases} \iff \begin{cases} a = \dfrac{-1}{2} \\ \dfrac{-1}{2} = 4b \end{cases} \iff \begin{cases} a = \dfrac{-1}{2} \\ b = \dfrac{-1}{8} \end{cases}$. Donc $u_n = \dfrac{-n}{2} - \dfrac{1}{8}$.
Pas besoin de faire la synthèse, elle consiste à refaire exactement l'analyse. Néanmoins elle peut permettre de vérifier à coup sûr qu'on ne s'est pas trompés.

2) On calcule $\dfrac{a}{n} + \dfrac{b}{n+1} + \dfrac{c}{n+2} = \dfrac{a(n+1)(n+2) + bn(n+2) + cn(n+1)}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{(a+b+c)n^2 + (3a+2b+c)n + 2a}{n(n+1)(n+2)}$.
Pour que cela fonctionne, il suffit donc d'avoir :
$$\begin{cases} a + b + c = 0 \\ 3a + 2b + c = 0 \\ 2a = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} b + c = -\dfrac{1}{2} \\ 2b + c = -\dfrac{3}{2} \\ a = \dfrac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} -1 + c = -\dfrac{1}{2} \\ b = -1 \quad (L_2 - L_1) \\ a = \dfrac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} c = \dfrac{1}{2} \\ b = -1 \\ a = \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$
Donc $\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{2n} - \dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{2(n+2)}$. Pas besoin de faire la synthèse, elle consiste à refaire exactement l'analyse. Néanmoins elle peut permettre de vérifier à coup sûr qu'on ne s'est pas trompés.

3) Il suffit de résoudre l'équation $y = \sqrt{1-x^2}$ d'inconnue x. On trouve $y^2 = 1 - x^2 \iff x^2 = 1 - y^2 \iff x = \pm\sqrt{1-y^2}$. Donc, il y a deux solutions, mais comme on cherche x positif, on prend $x = \sqrt{1-y^2}$ qui est l'unique possibilité. **4)** On développe $(n-1)(an^2 + bn + c) = an^3 + (b-a)n^2 + (c-b)n + c$. On résout donc :
$$\begin{cases} a = 1 \\ b - a = 0 \\ c - b = 0 \\ c = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 1 \\ c = 1 \end{cases}$$
On a donc $n^3 - 1 = (n-1)(n^2 + n + 1)$

Exercice 12 : *(★ Raisonnement par contraposée)*
1) Montrer que si n^2 est pair alors n est pair.
2) Montrer que si n^3 est impair alors n^2 est impair.
. . . .

Réponses : **1)** Voir Exercice 4 question 1.b)
2) Si n^3 est impair, supposons par l'absurde que n^2 soit pair. Cela veut dire que n est pair d'après la question précédente. Donc n^3 est pair. D'où une contradiction. Donc n^2 est impair.

Exercice 13 : *(Par l'absurde)*
1) Montrer qu'il n'existe pas un nombre $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n \leq N$
2) Montrer qu'il n'existe pas de réel $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 = ax + b$

3) Montre qu'il n'existe pas de fonction de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ strictement décroissante.
4) Montrer qu'il n'existe pas de plus grand nombre premier.

. . . .

Réponses : **1)** Si un tel nombre N existe, alors on aurait $N+1 \in \mathbb{N}$ et donc $N+1 \leq N$ soit $1 \leq 0$, ce qui est absurde. On en déduit qu'un tel nombre N est inexistant.

2) Si on avait $x^2 = ax+b$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ alors pour $x = 0, 1, 2$ on aurait respectivement les equations :

$$\begin{cases} a \cdot 0 + b = 0 \\ a \cdot 1 + b = 1 \\ a \cdot 2 + b = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} a \cdot b = 0 \\ a + 0 = 1 \\ 2a + 0 = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} a \cdot b = 0 \\ a = 1 \\ a = 2 \end{cases}$$

Ce système est impossible à résoudre car $1 \neq 2$, donc a, b n'existent pas.

3) Si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement décroissante, cela veut dire que $\varphi(n+1) < \varphi(n)$ donc $\varphi(n+1) \leq \varphi(n) - 1$. On montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \varphi(n) \leq \varphi(0) - n$. On a bien en initialisation $\varphi(0) \leq 0$. Hérédité : si cela est vrai au rang n alors au rang n, alors au rang $n+1$: $\varphi(n+1) \leq \varphi(n) + 1 \leq \varphi(0) - n - 1$ par hypothèse de récurrence. Cela est donc vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$. On obtient donc une contradiction en posant $n_0 = \varphi(0) + 1 \in \mathbb{N}$, en effet, on a $\varphi(n_0) \leq \varphi(0) - n_0 = \varphi(0) - \varphi(0) - 1 = -1$ Donc $\varphi(n_0) \notin \mathbb{N}$. Donc φ n'est pas à valeur dans $\mathbb{N}$, c'est contradictoire avec l'hypothèse de départ.

4) Supposons qu'il y ait un nombre fini de nombre premiers. Ca veut dire qu'il y en a un qui est le plus grand, on peut l'appeler p. On pose alors $n = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times p + 1 = p! + 1$
Comme n n'est pas un nombre premier, n est forcément divisible par un nombre premier inférieur à lui même. Supposons que q est un nombre premier qui divise n.
On a $q \leq p$ car p est le plus grand nombre premier. On en déduit que q divise $p!$ car $p! = 1 \times 2 \times \cdot \times q \times \cdot \times p$.
Donc q divise $n - p! = 1$.
C'est impossible : aucun nombre premier ne divise 1. On a donc une contradiction.