TD - Logique et Ensembles

BCPST 1

Feuille d'exercice

Année 2022- 2023

Indication sur les niveaux : ♡ Entraînement ★ Facile ★★ Moyen ★★★ Difficile

Logique

Exercice 1 : ♡ Traduire les assertions suivantes sous forme mathématique. Sont elles vraies ou fausses ?

- 1) Pour tout réel x , x^2 est positif
- 2) Il existe un unique réel x tel que x est strictement supérieur à 1 et $x^2 = 2$
- 3) Pour tout réel x , si x est strictement positif alors $\frac{1}{x}$ est strictement positif
- 4) Il existe un entier naturel n , tel que pour tout entier naturel m , $m + n = 0$ si et seulement si $m = 0$
- 5) si x appartient à A ou à B alors x est un nombre entier naturel pair.

Exercice 2 : ♡ Ecrire la négation des assertions suivantes. Sont elles vraies ou fausses ?

- 1) $\forall x \in \mathbb{R}, x = 1$
- 2) $\exists x \in \mathbb{R} \mid x = 1$
- 3) $\forall x > 0, x = 1$ ou $2x \leq 3$
- 4) $\exists x > 0, x = 1$ ou $2x \leq 3$
- 5) $\forall x \in [0, 2], x \in [0, 1] \cup [1, 2]$
- 6) $\forall x \in \llbracket 1, n \rrbracket, \exists y \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid x + y = n$
- 7) $\exists x \in \mathbb{N} \mid x \neq 0$ et $\forall n \in \llbracket 0, x \rrbracket, n = n^2$
- 8) $\forall x \in \mathbb{R}, x < 0 \implies x^2 \leq 0$
- 9) $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N, \frac{1}{n} \leq \varepsilon$

Exercice 3 : ★ (*Réciproques et contraposées*) Ecrire la réciproque, la contraposée puis la négation de chacune de ces implications. Préciser si elles sont vraies ou fausses.

- 1) $\forall x \in \mathbb{R}, \frac{1}{x} = 1 \implies x = 1$
- 2) $\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos(\theta) = 1 \implies \exists k \in \mathbb{Z} \mid \theta = 2k\pi$
- 3) $\forall n \in \mathbb{N}, (\exists p \in \mathbb{N} \mid n = 2p) \implies (\exists p' \in \mathbb{N} \mid n = 4p')$

Exercice 4 : ★ (*Équivalences*)

- 1) Montrer que les équivalences suivantes sont vraies :
 - 1.a) $\forall x \in \mathbb{R}, x^3 = 1 \iff x = 1$
 - 1.b) $\forall n \in \mathbb{N}, (\exists p \in \mathbb{N} \mid n = 2p) \iff (\exists p' \in \mathbb{N} \mid n^2 = 2p')$
 - 1.c) $\forall x \in \mathbb{R}, x \geq 0 \iff \sqrt{x^2} = x \iff |x| = x$
- 2) Ecrire la négation de la proposition " $A \iff B$ "

Ensembles

Exercice 5 : ♡ A et B sont deux sous ensembles de E . Simplifier les ensembles suivant :

- 1) $A \cap B \cap A$
- 2) $(A \cup B) \cap B$
- 3) $(A \cup B) \cap (B \cup A)$
- 4) $\overline{A} \cup (B \cap A)$
- 5) $\overline{\overline{A \cap B}} \cup A \cup B$
- 6) $\bigcap_{i=1}^n A_i \cup \bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}$
- 7) $\bigcup_{i=1}^n A_i \cap \bigcap_{i=1}^n \overline{A_i}$
- 8) $(B \cap \overline{A}) \cup A \cup B$

Exercice 6 : ♡ Calculer l'intersection et l'union de ces ensembles :

- 1) $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \{3, 4\}$
- 2) $A = [0, 1]$ et $B = [-1, 1[$
- 3) $A = \llbracket -1, n \rrbracket$ et $B = \mathbb{N}$
- 4) $A = [1, 2]$ et $B = [-\infty, 1[\cup [2, +\infty[$

Exercice 7 : ★ Pour chaque ensemble, dire si les éléments a, b, c appartiennent ou pas à l'ensemble.

- 1) $E = \{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$, $a = -1$, $b = 4$, $c = 12$
- 2) $E = \{x^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$, $a = -1$, $b = 4$, $c = 12$
- 3) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 > x\}$, $a = -1$, $b = 4$, $c = \frac{1}{2}$
- 4) $E = \{n \in \mathbb{N} \mid \exists m \in \mathbb{N}, mn = 6\}$, $a = 2$, $b = -6$, $c = 5$
- 5) $E = \{F \in \mathcal{P}(\mathbb{R}) \mid 5 \in F\}$, $a = 5$, $b = \{3, 5\}$, $c =]-\infty, 5[$.
- 6) $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > y\}$, $a = (5, 6)$, $b = 2$, $c = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.
- 7) $E = \{(A, B) \in \mathcal{P}(\mathbb{N})^2 \mid A \cap B \neq \emptyset\}$, $a = (\llbracket 1, 6 \rrbracket, \llbracket 6, 9 \rrbracket)$, $b = (\{1, 5, 37\}, \{3, 6, 29\})$, $c = ([1, 3], [2, +\infty[)$.

Exercice 8 : ★★ Pour chaque paire d'ensembles ci dessous, dire si l'un est inclus dans l'autre, s'ils sont égaux ou rien de tout ça.

- 1) $E = \mathbb{R}$ et $F = \{x^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$
- 2) $E = \llbracket 1, 3 \rrbracket$ et $F = \left\{ n \in \mathbb{N}^* \mid \frac{1}{n} < \frac{1}{2} \right\}$
- 3) $E = \mathbb{N}$ et $F = \{2p \mid p \in \mathbb{N}\} \cup \{2p+1 \mid p \in \mathbb{N}\}$
- 4) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 1\}$ et $F = \{y \in \mathbb{R} \mid y^3 \leq 1\}$
- 5) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid \exp x \geq 1\}$ et $F = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 1\}$
- 6) $E = [0, 2]^2$ et $F = [0, 1]^2$
- 7) $E = [0, 2]^2$ et $F = [0, 1]^2 \cup [1, 2]^2$
- 8) Si $B \subset A$, $E = P(A)$ et $F = P(B)$

Raisonnement

Exercice 9 : (★ - ★★ *Réurrence*)

- 1) On pose $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $u_{n+1} = u_n + 1$. Montrer que $u_n = n$.
- 2) On pose $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $u_{n+1} = 2u_n$. Montrer que $u_n = 2^n$.
- 3) On pose $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{1}{u_n}$. Calculer u_{2n} et u_{2n+1} .
- 4) On pose $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \frac{1}{1+u_n}$. Montrer que la suite est bien définie et que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq 1$
- 5) On pose $u_n = 1 + 2 + \dots + n$ et $v_n = 1 + 2^3 + \dots + n^3$. Montrer que $v_n = u_n^2$

Exercice 10 : (★ - ★★ *Disjonction de cas*)

- 1) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = 1 + (-1)^n$. Montrer que $u_n \in \{0, 2\}$.
- 2) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, Montrer que $\sqrt{x^2} = |x|$.
- 3) Pour $x, y \in \mathbb{R}$, Montrer que $|xy| = |x||y|$
- 4) Pour $x, y \in \mathbb{R}$, Montrer que $|x+y| \leq |x| + |y|$
- 5) Pour $x \in \mathbb{R}_+$, montrer que $\sin x \leq x$

Exercice 11 : (★★ *Analyse-Synthèse*)

- 1) On a une suite (u_n) qui vérifie la relation de récurrence $u_{n+1} = 5u_n + 2n$. Trouver une suite de la forme $u_n = an + b$, $a, b \in \mathbb{R}$ qui vérifie cette relation.
- 2) Trouver trois réels $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{a}{n} + \frac{b}{n+1} + \frac{c}{n+2}$
- 3) Pour tout $y \in [-1, 1]$, montrer qu'il existe un unique $x \in [-1, 1]$ tel que $\sqrt{1-x^2} = y$.
- 4) Trouver trois réels $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}$, $n^3 - 1 = (n-1)(an^2 + bn + c)$

Exercice 12 : (★ *Raisonnement par contraposée*)

- 1) Montrer que si n^2 est pair alors n est pair.
- 2) Montrer que si n^3 est impair alors n^2 est impair.

Exercice 13 : (★★ - ★★★ *Par l'absurde*)

- 1) Montrer qu'il n'existe pas un nombre $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, n \leq N$
- 2) Montrer qu'il n'existe pas de réel $a, b \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 = ax + b$
- 3) Montrer qu'il n'existe pas d'application de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}$ strictement décroissante.
- 4) Montrer qu'il n'existe pas de plus grand nombre premier.