

TD 2 - Nombres $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$

BCPST 1

Feuille d'exercice

Année 2023- 2024

Indication sur les niveaux : ♡ Entraînement ★ Facile ★★ Moyen ★★★ Difficile

Nombres Entiers

Exercice 1 : ★ Ecrire la décomposition en produit de facteurs premiers des nombres suivants : 1) 123
2) 1000 3) 824 4) 1024 5) 133 6) 6615 7) 2310 8) 131

Equations

Exercice 2 : ♡ Résoudre les équations suivantes pour $x \in \mathbb{R}$:

- 1) $x + 1 = 2x + 3$ 2) $x = \frac{1}{x}$ 3) Si $a \in \mathbb{R}$, $3x + 1 = a$ 4) $\frac{x+2}{x-3} = 0$ 5) $\frac{x+5}{2x-1} = 2$
6) $\frac{x^2-1}{x-1} = x+1$ 7) Pour $a, b \in \mathbb{R}$, $\frac{x+a}{2x+b} = 1$ 8) $x^2 = -1$ 9) $\sqrt{x+3} = 2$
10) $\sqrt{1-x} = x$ 11) $|x| = x$ 12) $\ln(x+2) = 3$ 13) $\cos(x) = 0$ 14) $2 - \frac{1}{x} = x$

Exercice 3 : ♡ Résoudre les équations de degré 2 suivantes et factoriser les expressions quand cela est possible :

- 1) $x^2 + 2x + 1 = 0$ 2) $x^2 + 1 = 0$ 3) $x^2 + 3x + 2 = 0$ 4) $x^2 - 5x + 6 = 0$ 5) $x^2 - 9 = 0$
6) $2x^2 - 4x + 2 = 0$ 7) $(x+3)(x-1) = 0$ 8) $(x+2)^2 + 1 = 0$ 9) $(x-5)^2 - 16 = 0$
10) $x^2 + x + 1 = 0$ 11) $9x - 9x - 18 = 0$ 12) $x^2 + 2x + 5 = 2$ 13) $x^2 + 5x + 3 = x^2 + 9x + 2$

Exercice 4 : (Avec des valeurs absolues) ★ - ★★★ Résoudre les équations suivantes :

- 1) $|x|x = 3x + 2$ 2) $|x+2| + |3x-1| = 4$ 3) $|x^2 + x + 3| = |x|$ 4) $x + |x| = \frac{x}{2}$
5) Pour $a, b \in \mathbb{R}$, $|x-a| = |x-b|$

Exercice 5 : (Avec des fonctions usuelles) ★★ Résoudre les équations suivantes :

- 1) $\ln((x+2)(x-1)) = \ln 2$ 2) $x + \sqrt{2x+1} = 1$

Inéquations

Exercice 6 : (Valeurs absolues) ★

Compléter le tableau suivant :

$ x-3 < 1$	$2 < x < 4$	$x \in]2, 4[$
$ x+2 \geq 10$		
	$2 \leq x \leq 8$	
		$x \in]-\infty, 0[\cup]4, +\infty[$
$ x+3 \leq 5$		
		$x \in]8, 10[$
	$x < 2$ ou $x > 5$	

Exercice 7 : ♡

Résoudre les inéquations suivantes :

- 1) $2x + 2 > 0$ 2) $\frac{1}{x+1} \geq 2$ 3) $x^2 \leq 12$
4) $x^2 - 1 > 0$ 5) $(x+5)(x+2)(x-1) \leq 0$
6) $\frac{x+2}{x+3} \geq 0$

Exercice 8 : (Avec des constantes) ★ - ★★

Résoudre les inéquations suivantes :

- 1) Si $a \in \mathbb{R}$, Résoudre $ax > 0$
2) Si $\alpha \in \mathbb{R}$, Résoudre $\sqrt{x+\alpha} > 0$
3) Si $\omega \in \mathbb{R}^*$, Résoudre $xw > \frac{x}{w}$

Exercice 9 : (*Polynômes de degré 2*) ★ - ★★★ Résoudre les inéquations suivantes et représenter graphiquement l'ensemble des solutions :

- 1) $x^2 + 3x + 2 \leq 0$ 2) $x^2 + 2x - 1 < 2x^2 + 3x + 1$ 3) $x^2 - 5x + 8 \leq -x^2 + 3x$
 4) $x^2 + 4x - 5 < 4x + 7$ 5) $(x^2 + 9x + 18)(-x^2 + 2x + 6) > 0$ 6) $\frac{4 - x^2}{3x^2 + 6x - 45} \geq 0$

Exercice 10 : ★★★ -★★★★ Résoudre les inéquations suivantes :

- 1) $x^2 + 4 > 2x + 1$ 2) $\sqrt{x^2 - 4x + 1} > 2x$ 3) $x^2 \leq |2x - 1|$ 4) $|x + 4| > |x - 1|$
 5) Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, Résoudre $\sqrt{x^2 + \alpha x} \geq \alpha$ 6) Pour $n, m \in \mathbb{R}$, Résoudre $x^m > x^n$
 7) Si $a \in \mathbb{R}$, Résoudre $\lfloor x \rfloor < a$

Partie entière

Exercice 11 : ♥ Calculer les parties entières suivantes :

- 1) $\lfloor 12 \rfloor$ 2) $\lfloor -11 \rfloor$ 3) $\lfloor 0,5 \rfloor$ 4) $\lfloor -8,6 \rfloor$ 5) $\lfloor 75,98 \rfloor$ 6) $\left\lfloor \frac{8}{3} \right\rfloor$ 7) $\lfloor \pi \rfloor$ 8) $\lfloor -\sqrt{2} \rfloor$

Exercice 12 : (*Partie entière de l'opposé*) ★★ $\forall x \in \mathbb{R}$, montrer que $-\lfloor x \rfloor - 1 \leq \lfloor -x \rfloor \leq -\lfloor x \rfloor$. Dans quels cas a-t-on $\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor$?

Exercice 13 : (*Partie entière de la somme*) ★★ Démontrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x + y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$. Combien y a-t-il de valeurs possibles pour $\lfloor x + y \rfloor$?

Exercice 14 : ★★★ Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \left\lfloor \frac{1}{n} \lfloor nx \rfloor \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Bornes supérieures, inférieures

Exercice 15 : ★ - ★★ Déterminer les bornes supérieures, inférieures, maximum ou minimum des ensembles suivants lorsque cela existe.

- 1) $[2, 6[$ 2) $[1, 2[\cup]3, +\infty[$ 3) $[4, 9[\cap]1, +\infty[$ 4) $\llbracket 1, n \rrbracket$ 5) $\{2p \mid p \in \llbracket 1, 9 \rrbracket\}$
 6) $\left\{ \frac{1}{x} \mid x \in [2, 3] \right\}$ 7) $\{\lfloor x \rfloor \mid x > 1\}$ 8) $\mathbb{R} \setminus [1, +\infty[$ 9) $\left\{ \frac{x}{2} + k \mid x \in [0, 1[, k \in \llbracket 0, 3 \rrbracket \right\}$

Exercice 16 : ★★ Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Déterminer la borne supérieure et la borne inférieure de l'ensemble $[a, b] \cap \mathbb{N}$. Cet ensemble admet-il un maximum et/ou un minimum ?

Exercice 17 : (*Bornes avec un scalaire*) ★★ Soient A un sous ensemble non vide de $\mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et

$$C = \lambda A = \{\lambda a \mid a \in A\}$$

- 1) Montrer que A est bornées $\iff C$ est bornée.
 2) Si $\lambda > 0$, montrer que $\sup C = \lambda \sup A$ et $\inf C = \lambda \inf A$. 3) Que se passe-t-il si $\lambda < 0$?

Exercice 18 : (*Bornes de la somme*) ★★ Soient A et B deux sous ensembles non vides de $\mathbb{R}$ et

$$C = A + B = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}$$

- 1) Montrer que A et B sont bornées $\iff C$ est bornée.
 2) Montrer que $\sup C = \sup A + \sup B$ et $\inf C = \inf A + \inf B$

Exercice 19 : (*Bornes du produit*) ★★★ Soient A et B deux sous ensembles non vides de $\mathbb{R}$ et

$$C = \{ab \mid a \in A, b \in B\}$$

- 1) . 1.a) Montrer que A et B sont bornées $\implies C$ est bornée.
 : . 1.b) Que peut-on dire de la réciproque ?
 2) . 2.a) Montrer que si $A \subset \mathbb{R}_+$ et $B \subset \mathbb{R}_+$ alors $\sup C = \sup A \sup B$ et $\inf C = \inf A \inf B$
 - . 2.b) Est ce que cela reste vrai si on ne suppose pas $A \subset \mathbb{R}_+$ et $B \subset \mathbb{R}_+$?