TD 2 - Nombres $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$

BCPST 1 — Feuille d'exercice — Année 2022- 2023

Nombres Entiers

Exercice 1 : *(En 1 minute)* Ecrire la décomposition en produit de facteur premiers des nombres suivants :
1) 123 **2)** 1000 **3)** 824 **4)** 1024 **5)** 133 **6)** 6615 **7)** 2310 **8)** 131

....

Réponses : **1)** $123 = \boxed{3 \times 43}$ **2)** $1000 = 10^3 = \boxed{2^3 \times 5^3}$ **3)** $824 = 2 \cdot 412 = 2 \cdot 4 \cdot 103 = \boxed{2^3 \times 103}$
4) $1024 = \boxed{2^{10}}$ **5)** $133 = \boxed{7 \times 19}$ **6)** $6615 = 5 \cdot 1323 = 5 \cdot 9 \cdot 147 = \boxed{3^2 \times 5 \times 147}$
7) $2310 = 3 \times 10 \times 77 = \boxed{2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11}$ **8)** $131 = \boxed{131}$ car 131 est premier.

Equations

Exercice 2 : *(En 1 minute)* Résoudre les équations suivantes pour $x \in \mathbb{R}$:
1) $x + 1 = 2x + 3$ **2)** $x = \frac{1}{x}$ **3)** Si $a \in \mathbb{R}$, $3x + 1 = a$ **4)** $\frac{x+2}{x-3} = 0$ **5)** $\frac{x+5}{2x-1} = 2$
6) $\frac{x^2-1}{x-1} = x + 1$ **7)** Pour $a, b \in \mathbb{R}$, $\frac{x+a}{2x+b} = 1$ **8)** $x^2 = -1$ **9)** $\sqrt{x+3} = 2$
10) $\sqrt{1-x} = x$ **11)** $|x| = x$ **12)** $\ln(x+2) = 3$ **13)** $\cos(x) = 0$ **14)** $2 - \frac{1}{x} = x$

....

Réponses : **1)** $x + 1 = 2x + 3 \iff x = -2$: $\boxed{S = \{-2\}}$
2) $x = \frac{1}{x} \iff x^2 = 1$ donc $\boxed{S = \{-1, 1\}}$ (valeur interdite $x = 0$ car on a du $\frac{1}{x}$)
3) $3x + 1 = a \iff x = \frac{a-1}{3}$: $\boxed{S = \left\{\frac{a-1}{3}\right\}}$ **4)** $\frac{x+2}{x-3} = 0 \iff x + 2 = 0 \iff x = -2$: $\boxed{S = \{-2\}}$
5) $\frac{x+5}{2x+1} = 2 \iff x + 5 = 4x + 2 \iff 3x = 3 \iff x = 1$: $\boxed{S = \{1\}}$
6) $\frac{x^2-1}{x-1} = x + 1 \iff x^2 - 1 = x^2 - 1$ vrai pour tout x donc $\boxed{S = \mathbb{R}}$
7) Pour $a, b \in \mathbb{R}$, $\frac{x+a}{2x+b} = 1 \iff x + a = 2x + b \iff x = a - b$ Attention valeur interdite : $x = \frac{-b}{2}$ Donc si $a - b = \frac{-b}{2}$ ça ne marche pas. $a - b = \frac{-b}{2} \iff 2a - 2b = -b \iff b = 2a$.
Conclusion : $\boxed{S = \begin{cases} \emptyset \text{ si } b = 2a \\ \{a-b\} \text{ sinon} \end{cases}}$ En effet si $b = 2a$ alors $\frac{x+a}{2x+b} = \frac{x+a}{2x+2a} = \frac{1}{2} \neq 1$ pour tout x.
8) $x^2 = -1$ Pas de solution réelle. $\boxed{S = \emptyset}$
9) $\sqrt{x+3} = 2$ Condition : $x \leq -3$. On a alors $\sqrt{x+3} = 2 \iff x + 3 = 4 \iff x = 1$ Cela vérifie la condition donc $\boxed{S = \{1\}}$
10) $\sqrt{1-x} = x$ Condition $1 - x \geq 0 \iff 1 \geq x$ et $x \geq 0$ car $\sqrt{}$ est positif. Donc $x \in [0, 1]$.
On continue : $\sqrt{1-x} = x \iff 1 - x = x^2 \iff x^2 + x - 1 = 0$ On a $\Delta = 5$ Donc $x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$. On a $x_1 \in [0, 1]$ et $x_2 \notin [0, 1]$ donc seul x_1 respecte la condition. $\boxed{S = \left\{\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right\}}$
11) $|x| = x$ Si $x \leq 0$ on a $|x| = x$ qui est vérifié, sinon $x < 0$ et $|x| = -x = x \iff 2x = 0 \iff x = 0$ Donc l'équation est vérifiée uniquement pas les x positifs ou nuls. on trouve $\boxed{S = \mathbb{R}_+}$.
12) $\ln(x+2) = 3$ La condition est $x > -2$. On a $\ln(x+2) = 3 \iff x + 2 = e^3 \iff x = e^3 - 2$ donc

$\boxed{S=\{e^3-2\}}$ **13)** $\cos(x)=0$. C'est du cours : $\boxed{S=\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\right\}}$

14) $2-\frac{1}{x}=x$. On veut $x\neq 0$. On a :

$2-\frac{1}{x}=x=0 \iff 2x-1=x^2 \iff x^2-2x+1=0 \iff (x-1)^2=0 \iff x=1$ Donc $\boxed{S=\{1\}}$

Exercice 3 : *(En 1 minute)* Résoudre les équations de degré 2 suivantes et factoriser les expressions quand cela est possible :

1) $x^2+2x+1=0$ **2)** $x^2+1=0$ **3)** $x^2+3x+2=0$ **4)** $x^2-5x+6=0$ **5)** $x^2-9=0$
6) $2x^2-4x+2=0$ **7)** $(x+3)(x-1)=0$ **8)** $(x+2)^2+1=0$ **9)** $(x-5)^2-16=0$
10) $x^2+x+1=0$ **11)** $9x-9x-18=0$ **12)** $x^2+2x+5=2$ **13)** $x^2+5x+3=x^2+9x+2$

....

Remarque : les réponses se font par calcul de Δ ou en remarquant des identités remarquables, ici je mets directement les solutions sous forme factorisée.

Réponses : **1)** $x^2+2x+1=(x+1)^2=0 \iff \boxed{x=0}$

2) $x^2+1=0 \iff x^2=-1$ $\boxed{\text{pas de solution}}$ car $x^2\geq 0$

3) $x^2+3x+2=(x+1)(x+2)=0 \iff \boxed{x=-1 \text{ ou } x=-2}$

4) $x^2-5x+6=(x-3)(x-2)=0 \iff \boxed{x=2 \text{ ou } x=3}$

5) $x^2-9=(x-3)(x+3)=0 \iff \boxed{x=3 \text{ ou } x=-3}$

6) $2x^2-4x+2=2(x^2-2x+1)=2(x-1)^2 \iff \boxed{x=1}$

7) Celui là est déjà factorisé. $(x+3)(x-1)=0 \iff \boxed{x=-3 \text{ ou } x=1}$

8) $(x+2)^2+1=0 \iff (x+2)^2=-1$ $\boxed{\text{pas de solution}}$ car $(x+2)^2\geq 0$

9) $(x-5)^2-16=(x-5+4)(x-5-4)=(x-1)(x-9)=0 \iff \boxed{x=1 \text{ ou } x=9}$

10) $x^2+x+1=0$ On a $\Delta=1-4=-3$ donc $\boxed{\text{pas de solution}}$

11) $9x-9x-18=9(x^2-x-2)=9(x+1)(x-2) \iff \boxed{x=-1 \text{ ou } x=2}$

12) $x^2+2x+5=2 \iff x^2+2x+3=0 \iff (x+1)(x+2)=0 \iff \boxed{x=-1 \text{ ou } x=-2}$

13) $x^2+5x+3=x^2+9x+2 \iff 4x-1=0 \iff \boxed{x=\frac{1}{4}}$ (on ne peut pas factoriser l'expression $4x-1$)

Exercice 4 : *(Avec des valeurs absolues)* Résoudre les équations suivantes :

1) $|x|x=3x+2$ **2)** $|x+2|+|3x-1|=4$ **3)** $|x^2+x+3|=|x|$ **4)** $x+|x|=\frac{x}{2}$
5) Pour $a,b\in\mathbb{R}$, $|x-a|=|x-b|$

....

Réponses : **1)** On distingue selon le signe de x.

Si $\underline{x\geq 0}$ Alors $|x|x=3x+2 \iff x^2-3x-2=0$. On a $\Delta=9+8=17$ donc $x_1=\frac{3+\sqrt{17}}{2}$ et $x_2=\frac{3-\sqrt{17}}{2}$. On a $x_2<0$ donc seul x_1 est valable.

Si $\underline{x<0}$ On a $|x|x=3x+2 \iff x^2+3x+2=0 \iff (x+1)(x+2)=0$ Donc $x_1=-1$ ou $x_2=-2$ sont les deux solutions valables qui vérifient bien $x_1<0$ et $x_2<0$.

Finalement $\boxed{S=\left\{-1,-2,\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right\}}$

2) On distingue selon les signes de $x+2$ et $3x-1$:

x	$-\infty$		-2		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$3x-1$		$-$		$-$	0	$-$	

★ Si $x\in]-\infty,-2]$ alors $|x+2|+|3x-1|=4 \iff -x-2-3x+1=4 \iff -4x=5 \iff x=\frac{-5}{4}$ C'est contradictoire avec $x\leq -2$ Donc pas de solution.

★ Si $x\in\left]-2,\frac{1}{3}\right]$ alors $|x+2|+|3x-1|=4 \iff x+2-3x+1=4 \iff -2x=1 \iff x=\frac{-1}{2}$ On a bien $\frac{-1}{2} \in \left]-2, \frac{1}{3}\right]$ donc c'est une solution valable.

★ Si $x \in \left]\frac{1}{3}, +\infty\right[$ alors $|x+2|+|3x-1| = 4 \iff x+2+3x-1 = 4 \iff 4x = 3 \iff x = \frac{3}{4}$ On a bien $\frac{3}{4} \leq \frac{1}{3}$ donc la solution est valable.

En conclusion on trouve $\boxed{S = \left\{\frac{-1}{2}, \frac{3}{4}\right\}}$

3) $|x^2+x+3| = |x|$ Pour le signe de x^2+x+3 on calcule : $\Delta = 1-12 = -11$. Le signe est donc constant positif car le coefficient devant x^2 est 1. On a donc $x^2+x+3 \geq 0$ pour tout x. Reste à distinguer selon le signe de x.

★ $x \geq 0$: alors $|x^2+x+3| = |x| \iff x^2+x+3 = x \iff x^2 = -3$. Pas de solution.

★ $x < 0$: alors $|x^2+x+3| = |x| \iff x^2+2x+3 = 0 \iff (x+1)(x+2) = 0 \iff x = -1$ ou $x = -2$.

En conclusion $\boxed{S = \{-2, -1\}}$.

4) $x + |x| = \frac{x}{2}$. Comme d'hab on peut distinguer selon le signe de x mais ici il y a plus simple.

On a $x + |x| = \frac{x}{2} \iff |x| = \frac{-x}{2}$ Donc en valeur absolue cela donne :$|x| = \left|\frac{-x}{2}\right| = \frac{|x|}{2} \iff \frac{|x|}{2} = 0 \iff$ $|x| = 0$ donc $x = 0$ Donc $\boxed{S = \{0\}}$.

5) On doit distinguer suivant les signes de $x-a$ et $x-b$. Déjà si $a = b$ c'est vrai pour tout $x \in \mathbb{R}$. Supposons donc dans la suite que $a \neq b$. On suppose que $a < b$.

x	$-\infty$		a		b		$+\infty$
$x-a$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-b$		$-$		$-$	0	$-$	

★ Si $x \in]-\infty, a]$ On a $|x-a| = |x-b| \iff -x+a = -x+b \iff a = b$ Impossible, donc pas de solution.

★ Si $x \in]a, b]$ On a $|x-a| = |x-b| \iff x-a = -x+b \iff 2x = a+b \iff x = \frac{a+b}{2}$ On a bien $\frac{a+b}{2} \in]a, b]$ car $a = \frac{a+a}{2} < \frac{a+b}{2} < \frac{b+b}{2} = b$ En fait c'est le milieu.

★ Si $x \in]-\infty, a]$ On a $|x-a| = |x-b| \iff x-a = x-b \iff -a = -b$ Impossible, donc pas de solution.

Si $b < a$ on aurait exactement le même résultat par symétrie : Conclusion $\boxed{S = \begin{cases} \mathbb{R} \text{ si } a = b \\ \left\{\frac{a+b}{2}\right\} \text{ sinon} \end{cases}}$

Remarque : c'est logique que la solution soit le milieu. Concrètement on cherche à trouver x qui soit à la même distance de a que de b. Cela revient à chercher le nombre au milieu de a et b.

<u>Exercice 5</u> : *(Avec des fonctions usuelles)* Résoudre les équations suivantes :

1) $\ln((x+2)(x-1)) = \ln 2$ **2)** $x + \sqrt{2x+1} = 1$

....

Réponses : **1)** $\ln((x+2)(x-1)) = \ln 2$ est valide à condition d'avoir $(x+2)(x-1) > 0$ c'est à dire $x \in]-\infty, -2[\cup]1, +\infty[$.

On a ensuite, $\ln((x+2)(x-1)) = \ln 2 \iff (x+2)(x-1) = 2 \iff x^2+x-2 = 2 \iff x^2+x-4 = 0$. Donc $\Delta = 1+16 = 17$. On a $x_1 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2}$ et $x_2 = \frac{-1+\sqrt{17}}{2}$ On a $x_1 = \frac{-1-\sqrt{17}}{2} < \frac{-1-4}{2} = \frac{-5}{2} < -2$ et $x_2 > \frac{-1+4}{2} = \frac{3}{2} > 1$. Donc $x_1, x_2 \in]-\infty, -2[\cup]1, +\infty[$ et Donc $\boxed{S = \left\{\frac{-1-\sqrt{17}}{2}, \frac{-1+\sqrt{17}}{2}\right\}}$

2) $x + \sqrt{2x+1} = 1$ est valide à condition d'avoir $2x+1 > 0$ c'est à dire $x > \frac{-1}{2}$.

A cette condition, on peut faire l'analyse :

$x+\sqrt{2x+1} = 1 \implies 2x+1 = (1-x)^2 = 1-2x+x^2 \iff x^2-4x = 0 \iff x(x-4) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 4$.

On a bien 0 et 4 qui vérifient la condition $x > \frac{-1}{2}$, MAIS ce ne sont pas forcément des solutions car on n'a pas que des équivalences dans notre raisonnement ! Il faut faire une synthèse pour vérifier. On a $0+\sqrt{2 \cdot 0+1} = 1$ Ok Par contre $4 + \sqrt{2 \cdot 4+1} = 4 + \sqrt{9} = 7 \neq 1$ donc 4 n'est pas solution ! ! On trouve $\boxed{S = \{0\}}$

Inéquations

Exercice 6 : *(Valeurs absolues)* Compléter le tableau suivant :

$\lvert x-3\rvert < 1$	$2 < x < 4$	$x \in]2,4[$
$\lvert x+2\rvert \geq 10$	$x \leq -10$ ou $x \geq 8$	$x \in]-\infty,-10] \cup [8,+\infty[$
$\lvert x-5\rvert \leq 3$	$2 \leq x \leq 8$	$x \in [2,8]$
$\lvert x-2\rvert > 2$	$x < 0$ ou $x > 4$	$x \in]-\infty,0[\cup]4,+\infty[$
$\lvert x+3\rvert \leq 5$	$-8 \leq x \leq 2$	$x \in [-8,2]$
$\lvert x-9\rvert < 1$	$8 < x < 10$	$x \in]8,10[$
$\left\lvert x-\frac{7}{2}\right\rvert > \frac{3}{2}$	$x < 2$ ou $x > 5$	$x \in]-\infty,2[\cup]5,+\infty[$

Exercice 7 : *(En 1 minute)* Résoudre les inéquations suivantes et représenter graphiquement l'ensemble des solutions :

1) $2x+2>0$ **2)** $\dfrac{1}{x+1} \geq 2$ **3)** $x^2 \leq 12$ **4)** $x^2-1>0$ **5)** $(x+5)(x+2)(x-1) \leq 0$

6) $\dfrac{x+2}{x+3} \geq 0$

....

Réponses : **1)** $2x+2>0 \iff x>-1$, $\boxed{S =]-1,+\infty[}$

2) $\dfrac{1}{x+1} \geq 2 \iff 0 < x+1 \leq \dfrac{1}{2} \iff -1 < x \leq \dfrac{-1}{2}$ Donc $\boxed{S = \left]-1,\dfrac{-1}{2}\right]}$

3) $x^2 \leq 5 \iff \sqrt{x^2} \leq 5 \iff |x| \leq \sqrt{5}$ Donc $\boxed{S = [-\sqrt{5},\sqrt{5}]}$

4) $x^2-1>0 \iff x^2>1 \iff x>1$ ou $x<-1$ Donc $\boxed{S =]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[}$

5) $(x+5)(x+2)(x-1) \leq 0$ Il faut faire un tableau de signe :

x	$-\infty$		-5		-2		1		$+\infty$
$x+5$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x+2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	

On trouve donc $\boxed{S =]--\infty,-5] \cup [-2,1]}$

6) $\dfrac{x+2}{x+3} \geq 0$. On a -3 valeur interdite car sinon $x+3=0$ déjà. Ensuite on veut avoir $x+2$ et $x+3$ du même signe. On pourrait encore faire un tableau de signe, mais on va commencer à faire ça de tête. on trouve : $\boxed{S =]-\infty,-3[\cup[2,+\infty[}$.

Exercice 8 : *(Avec des constantes)* Résoudre les inéquations suivantes :

1) Si $a \in \mathbb{R}$, Résoudre $ax > 0$ **2)** Si $\alpha \in \mathbb{R}$, Résoudre $\sqrt{x+\alpha} > \alpha$

3) Si $\omega \in \mathbb{R}^*$, Résoudre $xw > \dfrac{x}{w}$

....

1) Si $a \in \mathbb{R}$, Résoudre $ax > 0$. Cela dépend de a : $\boxed{S = \begin{cases} \emptyset \text{ si } a = 0 \\ \mathbb{R}_+^* \text{ si } a > 0 \\ \mathbb{R}_-^* \text{ si } a < 0 \end{cases}}$

2) Pour que $\sqrt{x+\alpha}$ soit défini il faut que $x \geq -\alpha$.
On a par ailleurs si $\underline{\alpha < 0}$, $\sqrt{x+\alpha} > \alpha$ est vrai car $\sqrt{x+\alpha} \geq 0 > \alpha$. Donc pour vérifier l'equation, il suffit d'avoir $x \geq \alpha$.
Si $\underline{\alpha \geq 0}$, $\sqrt{x+\alpha} > \alpha \implies x+\alpha > \alpha^2$ Donc $x > \alpha(\alpha-1)$ Vérifions juste dans quel cas cela valide la condition $x > -\alpha$: On a $\alpha(\alpha-1) \geq -\alpha \iff \alpha^2 \geq 0$ C'est vrai pour tout $\alpha > 0$, Donc $\boxed{S = \begin{cases}]\alpha(\alpha-1),+\infty[\text{ si } \alpha \geq 0 \\ [-\alpha,+\infty[\text{ si } \alpha < 0 \end{cases}}$

3) $xw > \dfrac{x}{w} \iff x\left(w - \dfrac{1}{w}\right) > 0$. Le résultat dépend donc du signe de $w - \dfrac{1}{w}$ comme la question 7).

Regardons déjà quand il s'annule : $w - \dfrac{1}{w} = 0 \iff w^2 = 1 \iff w = \pm 1$.

Enfin, étudions son signe :

$$w - \frac{1}{w} > 0 \iff w > \frac{1}{w} \iff \begin{cases} w^2 > 1 \text{ si } w > 0 \\ w^2 < 1 \text{ si } w < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} w \in]1, +\infty[\\ w \in]-1, 0[\end{cases} \iff w \in]-1, 0[\cup]1, +\infty[$$

Finalement, $\boxed{S = \begin{cases} \emptyset \text{ si } w \in \{-1, 1\} \\ \mathbb{R}_+^* \text{ si } w \in]-1, 0[\cup]1, +\infty[\\ \mathbb{R}_-^* \text{ si } w \in]-\infty, -1[\cup]0, 1[\end{cases}}$ en utilisant le même raisonnement que la question 1).

Exercice 9 : *(Polynômes de degré 2)* Résoudre les inéquations suivantes et représenter graphiquement l'ensemble des solutions :

1) $x^2 + 3x + 2 \leq 0$ **2)** $x^2 + 2x - 1 < 2x^2 + 3x + 1$ **3)** $x^2 - 5x + 8 \leq -x^2 + 3x$

4) $x^2 + 4x - 5 < 4x + 7$ **5)** $(x^2 + 9x + 18)(-x^2 + 2x + 6) > 0$ **6)** $\dfrac{4 - x^2}{3x^2 + 6x - 45} \geq 0$

....

Réponses : **1)** $x^2 + 3x + 2 = (x + 1)(x + 2) \leq 0$ donc $\boxed{S = [-3, -2]}$.

2) $x^2 + 2x - 1 < 2x^2 + 3x + 1 \iff 0 < x^2 + x + 2$ On a $\Delta = 1 - 8 = -7$ et le coefficient dominant est $1 > 0$. Donc C'est toujours positif strictement on a $\boxed{S = \mathbb{R}}$

3) $x^2 - 5x + 8 \leq -x^2 + 3x \iff 2x^2 + 8x + 8 \leq 0 \iff 2(x - 2)^2 \leq 0$. La seule possibilité est $x = 2$ on a alors $2(x - 2)^2 = 0$ Donc $\boxed{S = \{2\}}$

4) $x^2 + 4x - 5 < 4x + 7 \iff x^2 < 12$ Donc ce problème ce résoud plus facilement avec une racine carrée : $x^2 < 12 \iff \sqrt{x^2} < \sqrt{12} \iff |x| \leq 2\sqrt{3}$. Donc $\boxed{S = [-2\sqrt{3}, 2\sqrt{3}]}$

5) On a $x^2 + 9x + 18 = (x + 3)(x + 6)$ et pour $-x^2 + 2x + 6$ on a $\Delta = 4 + 24 = 28$.

Donc $x_1 = \dfrac{2 - 2\sqrt{7}}{2} = 1 - \sqrt{7}$ et $x_2 = 1 + \sqrt{7}$.

On a $(x^2+9x+18)(-x^2+2x+6) > 0 \iff (x+6)(x+3)(x-1+\sqrt{7})(x-1-\sqrt{7}) > 0$ On a rangé les racines dans l'ordre croissant à savoir $-6, -3, 1 - \sqrt{7}, 1 + \sqrt{7}$. Finalement $\boxed{S =]-\infty, -6[\cup] - 3, 1 - \sqrt{7}[\cup]1 + \sqrt{7}, +\infty[}$

6) On a directement $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$. Par ailleurs $3x^2 + 6x - 45 = 3(x^2 + 2x - 15) = 3(x + 3)(x - 5)$. Donc :

$\dfrac{4 - x^2}{3x^2 + 6x - 45} \geq 0 \iff \dfrac{-(x - 2)(x + 2)}{3(x + 3)(x - 5)} \geq 0$. N'oublions pas que -3 et -5 sont des valeurs interdites car elles annulent le dénominateur. On a $\boxed{S =]-3, -2] \cup [2, 5[}$

Exercice 10 : Résoudre les inéquations suivantes :

1) $x^2 + 4 > 2x + 1$ **2)** $\sqrt{x^2 - 4x + 1} > 2x$ **3)** $x^2 \leq |2x - 1|$ **4)** $|x + 4| > |x - 1|$

5) Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, Résoudre $\sqrt{x^2 + \alpha x} \geq \alpha$ **6)** Pour $n, m \in \mathbb{N}$, Résoudre $x^m > x^n$

7) Si $a \in \mathbb{R}$, Résoudre $\lfloor x \rfloor < a$

....

1) $x^2 + 4 > 2x + 1 \iff x^2 - 2x + 3 > 0 \iff (x - 1)(x + 3) > 0$ Donc $\boxed{S =]-\infty, -3[\cup]1, +\infty[}$.

2) $\sqrt{x^2 - 4x + 1} > 2x$. On regarde pour quels x on a la racine carrée qui est définie :
$x^2 - 4x + 1 \geq 0$ se résoud avec $\Delta = 16 - 4 = 12$ Donc $x_1 = 2 - \sqrt{3}$ et $x_2 = 2 + \sqrt{3}$ et l'équation est bien définie si $x \in]-\infty, 2 - \sqrt{3}] \cup [2 + \sqrt{3}, +\infty[$ $(\bigstar)$.

On remarque maintenant qu'il sera pratique de faire une disjonction de cas selon le signe de x :

<u>Si $x < 0$</u> : On a $\sqrt{x^2 - 4x + 1} \geq 0 > 2x$ est vérifié à condition que la racine carré soit bien définie. Or si $x < 0$ alors $x \in]-\infty, 2 - \sqrt{3}[$, donc la racine carrée est bien définie d'après $(\bigstar)$. L'équation est donc vérifiée pour tout $x < 0$.

<u>Si $x \geq 0$</u> Alors on a $\sqrt{x^2 - 4x + 1} > 2x \iff x^2 - 4x + 1 > 4x^2 \iff 0 > 3x^2 + 4x - 1$. On a cette fois $\Delta = 28$ et $x_1 = \dfrac{-2 - \sqrt{7}}{3}$ et $x_2 = \dfrac{-2 + \sqrt{7}}{3}$. L'équation est vérifiée pour $x \in \left]\dfrac{-2 - \sqrt{7}}{3}, \dfrac{-2 + \sqrt{7}}{3}\right[$.

Comme on a $x \geq 0$, cela revient à dire $x \in \left[0, \dfrac{2+\sqrt{7}}{3}\right[$. Il faut encore vérifier qu'on est bien dans les hypothèses. On peut vérifier à la calculatrice ou prouver que $\dfrac{2+\sqrt{7}}{3} < 2+\sqrt{3}$ Dès lors, $x \in \left[0, \dfrac{2+\sqrt{7}}{3}\right[\implies x \in]-\infty, 2-\sqrt{3}]$ et donc d'après ($\bigstar$), l'équation est vérifiée pour tout $x \in \left[0, \dfrac{2+\sqrt{7}}{3}\right[$.

Finalement, si on récapitule $\boxed{S = \left]-\infty, \dfrac{2+\sqrt{7}}{3}\right[}$.

Remarque : Si on souhaite prouver $\dfrac{-2+\sqrt{7}}{3} < 2-\sqrt{3}$ à la main, on écrit :
$\dfrac{-2+\sqrt{7}}{3} < 2-\sqrt{3} \iff -2+\sqrt{7} < 6-3\sqrt{3} \iff \sqrt{7} < 8-3\sqrt{3} \iff 7 < (8-3\sqrt{3})^2 = 64-48\sqrt{3}+27 = 91-48\sqrt{3} \iff 48\sqrt{3} < 84 \iff 24\sqrt{3} < 41 \iff 3 \times 24^2 < 42^2 \iff 1702 < 1764$. C'est donc vrai mais fastidieux à prouver...

3) $x^2 \leq |2x-1|$. On fait une disjonction de cas suivant le signe de $2x-1$:
On a $2x-1 > 0 \iff x > \dfrac{1}{2}$. Donc faisons les deux cas :
(*) <u>Si $x > \dfrac{1}{2}$</u> : alors, on a $|2x-1| = 2x-1$ donc
$x^2 \leq 2x-1 \iff x^2-2x+1 \leq 0 \iff (x-1)^2 \leq 0$ Cela est vrai uniquement si $x-1=0$ c'est à dire $x=1$. On a bien $1 > \dfrac{1}{2}$
(*) <u>Si $x \leq \dfrac{1}{2}$:</u> alors on a $|2x-1| = -2x+1$ donc
$x^2 \leq -2x+1 \iff x^2+2x-1 \leq 0$ On a $\Delta = 8$ et $x_1 = -1-\sqrt{2}$ et $x_2 = -1+\sqrt{2}$. Donc on veut $x \in [-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}]$ Or, on a $-1+\sqrt{2} < \dfrac{1}{2}$ Donc si $x \in [-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}]$ on est bien dans le cas où $x \leq \dfrac{1}{2}$. Ce sont donc toutes des solutions.

Finalement, si on récapitule $\boxed{S = [-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}] \cup \{1\}}$.

4) $|x+4| > |x-1|$. On doit distinguer selon les signes de $x+4$ et $x+1$.
On a $x+1 > 0 \iff x > -1$ et $x+4 > 0 \iff x > -4$. Faisons donc 3 cas :
(*) <u>Si $x > -1$</u> alors on a $|x+4| = x+4$ et $|x+1| = x+1$. Donc
$|x+4| > |x-1| \iff x+4 > x+1 \iff 4 > 1$ c'est vrai. Donc l'inégalité est vraie pour tout $x > -1$.
(*) <u>Si $-4 \leq x \leq -1$</u> alors on a $|x+4| = x+4$ et $|x+1| = -x-1$. Donc
$|x+4| > |x-1| \iff x+4 > -x-1 \iff 2x > -5 \iff x > \dfrac{-5}{2}$
Donc l'inégalité est vraie pour tout $x \in \left]\dfrac{-5}{2}, -1\right]$.
(*) <u>Si $x < -4$</u> alors on a $|x+4| = -x-4$ et $|x+1| = x+1$. Donc
$|x+4| > |x-1| \iff -x-4 > -x-1 \iff -4 > -1$ c'est faux. Donc l'inégalité est fausse pour tout $x < -4$.

Finalement, $\boxed{S = \left[\dfrac{-5}{2}, +\infty\right[}$.

5) Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, Résoudre $\sqrt{x^2+\alpha x} \geq \alpha$
La racine est définie à condition d'avoir $x^2+\alpha x \geq 0 \iff x(x+\alpha) \geq 0$.
C'est à dire si $\alpha < 0$, $x \in]-\infty, 0] \cup [-\alpha, +\infty[$ et si $\alpha > 0$, $x \in]-\infty, -\alpha] \cup [0, +\infty[$
Remarque : une formule qui permet de ne pas faire la distinction du signe de α serait : $x \in]-\infty, \min(0, -\alpha)] \cup [\max(0, -\alpha), +\infty[$. Mais de toute façon, on doit faire une disjonction de cas selon le signe de α :

(*)<u>Si $\alpha \leq 0$</u> alors on a $\sqrt{x^2+\alpha x} \geq \alpha$ est toujours vrai car $\sqrt{x^2+\alpha x} \geq 0 \geq \alpha$. Il faut quand même que la racine soit définie. donc les solutions sont $x \in]-\infty, 0] \cup [-\alpha, +\infty[$.

(*)<u>Si $\alpha > 0$</u> On résout : $\sqrt{x^2+\alpha x} \geq \alpha \iff x^2+\alpha x - \alpha^2 \geq 0$.
On a $\Delta = \alpha^2 + 4\alpha^2 = 5\alpha^2$ donc $x_1 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\alpha$ et $x_2 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\alpha$ Donc l'équation est vérifiée si $x \in \left]-\infty, \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\alpha\right] \cup \left[\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\alpha, +\infty\right[$
Reste a vérifier que ces solutions vérifient bien la condition du départ, à savoir $x \in]-\infty, -\alpha[\cup]0, +\infty[$.
En fait oui, parce que $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\alpha < -\alpha$ et $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\alpha > 0$. On a donc pour récapituler :

$$\boxed{S = \begin{cases}]-\infty, 0] \cup [-\alpha, +\infty[& \text{si } \alpha \leq 0 \\ \left]-\infty, \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\alpha\right] \cup \left[\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\alpha, +\infty\right[& \text{si } \alpha > 0 \end{cases}}$$

6) Pour $n, m \in \mathbb{N}$, Résoudre $x^m > x^n$. Cet exercice est pénible, ne le faites qu'en cas d'extrême motivation.
On va distinguer selon les valeurs de x :
(*)<u>Si $x > 1$</u> : alors on sait que $x^m > x^n \iff m > n$.
(*)<u>Si $0 < x < 1$</u> : alors on sait que $x^m > x^n \iff m < n$.
(*)<u>Si $x = 1$ ou $x = 0$</u> : alors on n'a pas $x^m > x^n$.
(*)<u>Si $-1 < x < 0$</u> : Ca devient l'enfer. On doit distinguer selon la parité des n et m :
. (**)<u>Si n et m pairs</u> : $x^m > x^n \iff m < n$
. (**)<u>Si n et m impairs</u> : $x^m > x^n \iff m > n$
. (**)<u>Si n pair et m impair</u> : $x^m > x^n$ est faux car $x^m < 0$ et $x^n > 0$
. (**)<u>Si n impair et m pair</u> : $x^m > x^n$ est vrai car $x^m > 0$ et $x^n < 0$
(*)<u>Si $x < -1$</u> : Pareil, on doit distinguer selon la parité des n et m :
. (**)<u>Si n et m pairs</u> : $x^m > x^n \iff m > n$
. (**)<u>Si n et m impairs</u> : $x^m > x^n \iff m < n$
. (**)<u>Si n pair et m impair</u> : $x^m > x^n$ est faux car $x^m < 0$ et $x^n > 0$
. (**)<u>Si n impair et m pair</u> : $x^m > x^n$ est vrai car $x^m > 0$ et $x^n < 0$
(*)<u>Si $x = -1$</u> : Pareil, on doit distinguer selon la parité des n et m :
. (**)<u>Si n et m ont la même parité</u> : C'est faux.
. (**)<u>Si n pair et m impair</u> : $x^m > x^n$ est faux car $x^m < 0$ et $x^n > 0$
. (**)<u>Si n impair et m pair</u> : $x^m > x^n$ est vrai car $x^m > 0$ et $x^n < 0$

On est heureux de récapituler tout ça dans un tableau selon les valeurs de n et de m cela fait neuf ou dix cas en tout à distinguer :

Solutions	n et m pairs	n et m impairs	n pair et m impair	n impair et m pair
$m > n$	$]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$	$]-1, 0[\cup]1, +\infty[$	$]1, +\infty[$	$]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$
$m = n$	$\emptyset$	$\emptyset$	/	/
$m < n$	$]-1, 0[\cup]0, 1[$	$]-\infty, -1[\cup]0, 1[$	$]0, 1[$	$]-\infty, 0[\cup]0, 1[$

7) Si $a \in \mathbb{R}$, Résoudre $\lfloor x \rfloor < a$. On va d'abord traiter le cas plus facile où $a \in \mathbb{Z}$:

(*)<u>Si $a \in \mathbb{Z}$</u> alors on va montrer que $\lfloor x \rfloor < a \iff x < a$:
$\Longleftarrow$] on a $x < a \implies \lfloor x \rfloor < a$ car $\lfloor x \rfloor \leq x$. Donc c'est vérifié pour tous les x tels que $x < a$.
$\Longrightarrow$] par contraposée, si $x \geq a$ lors $\lfloor x \rfloor \geq a$ car $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier inférieur à x, donc x ne vérifie pas l'équation.

(*)<u>Si $a \notin \mathbb{Z}$</u> alors on va montrer que $\lfloor x \rfloor < a \iff x < \lfloor a \rfloor + 1$:
$\Longleftarrow$] on a $x < \lfloor a \rfloor + 1 \implies \lfloor x \rfloor < \lfloor a \rfloor + 1 \implies \lfloor x \rfloor \leq \lfloor a \rfloor < a \quad$ (car $a \notin \mathbb{Z} \implies \lfloor a \rfloor < a$)
donc $\lfloor x \rfloor < a$ est vérifié.
$\Longrightarrow$] Par contraposée, si $x \geq \lfloor a \rfloor + 1$ alors $\lfloor x \rfloor \geq \lfloor a \rfloor + 1$ car $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier inférieur à x, donc x ne vérifie pas l'équation.

Conclusion : $\boxed{S = \begin{cases}]-\infty, a[& \text{si } a \in \mathbb{Z} \\ ]-\infty, \lfloor a \rfloor + 1[& \text{si } a \notin \mathbb{Z} \end{cases}}$

Partie entière

Exercice 11 : *(En 1 minute)* Calculer les parties entières suivantes :

1) $\lfloor 12 \rfloor$ **2)** $\lfloor -11 \rfloor$ **3)** $\lfloor 0,5 \rfloor$ **4)** $\lfloor -8,6 \rfloor$ **5)** $\lfloor 75,98 \rfloor$ **6)** $\left\lfloor \dfrac{8}{3} \right\rfloor$ **7)** $\lfloor \pi \rfloor$ **8)** $\lfloor -\sqrt{2} \rfloor$

....

Réponses : **1)** 12 **2)** -11 **3)** 0 **4)** -9 **5)** 75 **6)** 2 **7)** 3 **8)** -2

Exercice 12 : *(Partie entière de l'opposé)* $\forall x \in \mathbb{R}$, montrer que $-\lfloor x \rfloor - 1 \leq \lfloor -x \rfloor \leq -\lfloor x \rfloor$. Dans quels cas a-t-on $\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor$?

....

Réponse : On a $-(\lfloor x \rfloor + 1) - 1 < -x - 1 < \lfloor -x \rfloor \leq -x \leq -\lfloor x \rfloor$ Donc $-\lfloor x \rfloor - 2 < \lfloor -x \rfloor \leq -\lfloor x \rfloor$. L'inégalité de gauche est stricte, mais comme il s'agit de nombre entier, on peut la préciser avec une inégalité large : on trouve $-\lfloor x \rfloor - 1 \leq \lfloor -x \rfloor \leq -\lfloor x \rfloor$

On a $\lfloor -x \rfloor = -\lfloor x \rfloor \iff \lfloor -x \rfloor = -x = -\lfloor x \rfloor$ car on a $\lfloor -x \rfloor \leq -x \leq -\lfloor x \rfloor$ d'après ce qu'on a écrit au dessus. Il faut donc avoir $\lfloor x \rfloor = x$ c'est à dire $x \in \mathbb{Z}$. On a donc $\boxed{\lfloor -x \rfloor = \begin{cases} -\lfloor x \rfloor \text{ si } x \in \mathbb{Z} \\ -\lfloor x \rfloor - 1 \text{ si } x \notin \mathbb{Z} \end{cases}}$

Exercice 13 : *(Partie entière de la somme)* Démontrer que $\forall x, y \in \mathbb{R}$, $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$. Combien y a-t-il de valeurs possibles pour $\lfloor x+y \rfloor$?

....

Réponse : On a $x+y-1 < \lfloor x+y \rfloor \leq x+y$ et $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq x+y < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2$. on en déduit : $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor - 1 < \lfloor x+y \rfloor < \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 2$.

Comme ce sont des inégalités strictes entre nombres <u>entiers</u>, on peut les convertir en inégalités larges : $\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leq \lfloor x+y \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$. Les deux seules valeurs possibles sont $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ ou $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$

Exercice 14 : Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left\lfloor \dfrac{1}{n} \lfloor nx \rfloor \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

....

Réponse : On va encadrer $\lfloor nx \rfloor - n\lfloor x \rfloor$.

On a $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leq x \iff nx - n < n\lfloor x \rfloor \leq nx \iff -nx \leq -n\lfloor x \rfloor < -nx + n \quad (1)$

Et $nx - 1 < \lfloor nx \rfloor \leq nx \quad (2)$ Si on fait (2)-(1), on trouve :

$nx - 1 - nx < \lfloor nx \rfloor - n\lfloor x \rfloor < nx - nx + n \iff -1 < \lfloor nx \rfloor - n\lfloor x \rfloor < n \iff 0 \leq \lfloor nx \rfloor - n\lfloor x \rfloor \leq n - 1$ (car ce sont des nombres entiers)

Donc en divisant par n on obtient $0 \leq \dfrac{1}{n}\lfloor nx \rfloor - \lfloor x \rfloor \leq \dfrac{n-1}{n}$.

Reste à ajouter $\lfloor x \rfloor$ sur l'inégalité : $\lfloor x \rfloor \leq \dfrac{1}{n}\lfloor nx \rfloor \leq \lfloor x \rfloor + \dfrac{n-1}{n}$.

Comme on a par ailleurs $\dfrac{n-1}{n} = -\dfrac{1}{n} < 1$ on a $\lfloor x \rfloor \leq \dfrac{1}{n}\lfloor nx \rfloor < \lfloor x \rfloor + 1 \quad (\bigstar)$

Par définition, $\left\lfloor \dfrac{1}{n}\lfloor nx \rfloor \right\rfloor$ est l'unique entier qui encadre $\dfrac{1}{n}\lfloor nx \rfloor$ de cette façon :

$\left\lfloor \dfrac{1}{n}\lfloor nx \rfloor \right\rfloor \leq \dfrac{1}{n}\lfloor nx \rfloor < \left\lfloor \dfrac{1}{n}\lfloor nx \rfloor \right\rfloor + 1$. Mais on vient de prouver avec $(\bigstar)$ que $\lfloor x \rfloor$ est un entier qui réalise aussi cet encadrement.

Par unicité de la partie entière, on a donc $\boxed{\lfloor x \rfloor = \left\lfloor \dfrac{1}{n}\lfloor nx \rfloor \right\rfloor}$.

Bornes supérieures, inférieures

Exercice 15 : *(En 1 minute)* Déterminer les bornes supérieures, inférieures, maximum ou minimum des ensembles suivants quand ils existent. Justifier lorsqu'ils n'existent pas.

1) $[2,6[$ **2)** $[1,2[\cup]3,+\infty[$ **3)** $[4,9[\cap[1,+\infty[$ **4)** $[\![1,n]\!]$ **5)** $\{2p \mid p \in [\![1,9]\!]\}$
6) $\left\{\dfrac{1}{x} \mid x \in [2,3]\right\}$ **7)** $\{\lfloor x \rfloor \mid x > 1\}$ **8)** $\mathbb{R}\backslash[1,+\infty[$ **9)** $\left\{\dfrac{x}{2}+k \mid x \in [0,1[, k \in [\![0,3]\!]\right\}$

....

Réponse : Il faut bien justifier les résultats suivants, notamment sur les questions qui ne dépendent pas à priori d'un intervalle (4) 5) 6) 7) 9)).

Rappel pour justifier le min, il faut justifier que c'est le plus petit élément. 2 choses à justifier : que c'est bien un élément , et que c'est le plus petit. Pareil pour le max.

Pour montrer que le max est inexistant quand on a une borne sup, il suffit de montrer que la borne sup n'appartient pas à l'ensemble.

Je ne justifie pas tous les résultats (pas le temps), les voici regroupés dans un tableau :

Question	Ensemble	Borne Inf	Borne Sup	Min	Max
1)	$[2,6[$	2	6	2	Inexistant
2)	$[1,2[\cup]3,+\infty[$	1	Inexistant	1	Inexistant
3)	$[4,9[\cap[1,+\infty[$	1	9	1	Inexistant
4)	$[\![1,n]\!]$	1	n	1	n
5)	$\{2p \mid p \in [\![1,9]\!]\}$	2	18	2	18
6)	$\left\{\dfrac{1}{x} \mid x \in [2,3]\right\}$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{2}$
7)	$\{\lfloor x \rfloor \mid x > 1\}$	1	Inexistant	1	Inexistant
8)	$\mathbb{R}\backslash[1,+\infty[$	Inexistant	1	Inexistant	Inexistant
9)	$\left\{\dfrac{x}{2}+k \mid x \in [0,1[, k \in [\![0,3]\!]\right\}$	0	$\dfrac{7}{2}$	0	Inexistant

---

<u>Exercice 16</u> : *(Bornes avec un scalaire)* Soient A un sous ensemble non vide de $\mathbb{R}$, $\lambda \in \mathbb{R}^*$ et

$$C = \lambda A = \{\lambda a \mid a \in A\}$$

1) Montrer que A est bornée $\iff$ C est bornée.
2) Si $\lambda > 0$, montrer que $\sup C = \lambda \sup A$ et $\inf C = \lambda \inf A$. **3)** Que se passe-t-il si $\lambda < 0$?

....

Réponse : $\boxed{\Longrightarrow]}$ On a A bornée $\implies \exists M_A \in \mathbb{R} \mid \forall a \in A$, $|a| \leq M_A$ on a alors $\forall c \in C$, $|c| = |\lambda a| \leq |\lambda| M_A$ Donc C est borné aussi. $\boxed{\Longleftarrow]}$ Comme $\lambda \neq 0$, la réciproque est directe car $A = \{\dfrac{1}{\lambda}c \mid c \in \mathbb{R}\} = \dfrac{1}{\lambda}C$ Donc c'est le même raisonnement que $\boxed{\Longrightarrow]}$.

1) Si $\lambda > 0$ alors on a $\lambda a \leq \lambda \sup A$ pour tout $a \in A$, donc $\boxed{\sup C \leq \lambda \sup A}$ car c'est le plus petit majorant de C.

Ensuite, <u>méthode 1 :</u> si M est un majorant de C, on a pour tout $a \in A$, $\lambda a \leq A$, ainsi $a \leq \dfrac{M}{\lambda}$ et donc $\dfrac{M}{\lambda}$ est un majorant de A. donc $\sup A \leq \dfrac{M}{\lambda}$ et $\lambda \sup A \leq M$. donc $\lambda \sup A$ est le plus petit majorant et on a $\sup C = \lambda \sup A$.

<u>méthode 2 :</u> On peut aussi trouver l'inégalité dans l'autre sens : pour tout $a \in A$, on a $a = \dfrac{1}{\lambda}\lambda a \leq \dfrac{1}{\lambda}\sup C$ car $\lambda a \in C$. $\dfrac{1}{\lambda}\sup C$ est donc un majorant de A. On en déduit $\sup A \leq \dfrac{1}{\lambda}\sup C$ car $\sup A$ est le plus petit majorant de A cela donne $\boxed{\lambda \sup A \leq \lambda \sup C}$.

Il suit que $\boxed{\sup C = \lambda \sup A}$. Pour l'inf c'est pareil mais avec $\lambda \inf A \leq \lambda a$

2) Si $\lambda < 0$ alors on change les égalités en $\sup C = \lambda \inf A$ et $\inf C = \lambda \sup A$. Cela se démontre rapidement

en utilisant le résultat vu en cours que $\sup -A = -\inf A$. On a en effet :
$\sup C = \sup(\lambda A) = \sup(-|\lambda| A) = |\lambda| \sup -A = -|\lambda| \inf A = \lambda \inf A$

<u>Exercice 17</u> : *(Bornes de la somme)* Soient A et B deux sous ensembles non vides de $\mathbb{R}$ et

$$C = A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}$$

1) Montrer que A et B sont bornées $\iff$ C est bornée.
2) Montrer que $\sup C \leq \sup A + \sup B$ et $\inf C \geq \inf A + \inf B$

....

Réponse : **1)** $\boxed{\Longrightarrow]}$ On a A et B bornées $\Longrightarrow \exists M_A, M_B \in \mathbb{R} \mid \forall a \in A\ ,\ \forall b \in B\ ,\ |a| \leq M_A$ et $|b| \leq M_B$. Donc $\forall c \in C\ ,\ |c| = |a+b| \leq |a|+|b| M_A + M_B$. Donc C est majorée par $M_A + M_B$ et minorée par $-M_A - M_B$. Donc C est bornée.
$\boxed{\Longleftarrow]}$ On suppose que C est bornée, majorée (en valeur absolue) par M_C. On montre que A est bornée. Si $b \in B$ est fixé, on a $\forall a \in A, |a + b| \leq M_C$ car $a + b \in C$. Nous on veut majorer $|a|$, il faut donc utiliser l'inégalité triangulaire dans l'autre sens : $|a + b| \geq ||a| - |b||$, donc $|a| \leq |a + b| - |b| \leq M_C - |b| \leq M_C$. On a donc M_C qui est un majorant (en valeur absolue) de A.
2) On a $\forall (a, b) \in A \times B$, $a + b \leq \sup A + \sup B$. $\sup A + \sup B$ est donc un majorant de C, Donc
$\boxed{\sup C \leq \sup A + \sup B}$ car $\sup C$ est le plus petit majorant de C.
Dans l'autre sens, on a $\forall (a, b) \in A \times B\ ,\ a + b \leq \sup C$ Donc $a \leq \sup C - b$ et donc $\sup C - b$ est un majorant de A, on a : $\sup A \leq \sup C - b$ pour tout $b \in B$. On a donc $b \leq \sup C - \sup A$ et ceci étant vrai pour tout $b \in B$, on a $\sup B \leq \sup C - \sup A$. Finalement cela se réécrit $\boxed{\sup C \geq \sup A \sup B}$.
Il suit que $\boxed{\sup C = \sup A + \sup B}$. Pour l'inf c'est pareil mais avec $\inf A + \inf B \leq a + b$

<u>Exercice 18</u> : *(Bornes du produit)* Soient A et B deux sous ensembles non vides de $\mathbb{R}$ et

$$C = \{ab \mid a \in A,\ b \in B\}$$

1) . 1.a) Montrer que A et B sont bornées $\Longrightarrow$ C est bornée.
- . 1.b) Que peut-on dire de la réciproque ?
2) . 2.a) Montrer que si $A \subset \mathbb{R}_+$ et $B \subset \mathbb{R}_+$ alors $\sup C = \sup A \sup B$ et $\inf C = \inf A \inf B$
- . 2.b) Est ce que cela reste vrai si on ne suppose pas $A \subset \mathbb{R}_+$ et $B \subset \mathbb{R}_+$?

....

Réponse : **1)** . 1.a) On a A et B bornées $\Longrightarrow \exists M_A, M_B \in \mathbb{R} \mid \forall a \in A\ ,\ \forall b \in B\ ,\ |a| \leq M_A$ et $|b| \leq M_B$. Donc $\forall c \in C\ ,\ |c| = |ab| \leq M_A M_B$. Donc C est majorée par $M_A M_B$ et minorée par $-M_A M_B$. Donc C est bornée.
. 1.b) La réciproque est fausse. Par exemple si $A = \mathbb{R}$ et $B = \{0\}$ on a $C = \{0\}$ est bornée mais pas A.

2) Déjà si $A = \{0\}$ ou $B = \{0\}$, on a $C = \{0\}$ donc $\sup C = \sup A \sup B = 0$ est valide. Dans la suite on considère donc que A et B contiennent des éléments strictement supérieurs à 0. On a $\forall (a, b) \in A \times B$, $ab \leq \sup A \sup B$. $\sup A \sup B$ est donc un majorant de C, Donc
$\boxed{\sup C \leq \sup A \sup B}$ car $\sup C$ est le plus petit majorant de C.
Dans l'autre sens, on a $\forall (a, b) \in A \times B \mid b \neq 0\ ,\ ab \leq \sup C$ Donc $a \leq \dfrac{\sup C}{b}$ et donc $\dfrac{\sup C}{b}$ est un majorant de A, on a : $\sup A \leq \dfrac{\sup C}{b}$ pour tout $b \in B, b \neq 0$. On a donc $b \leq \dfrac{\sup C}{\sup A}$ ($A \neq \{0\}$ donc $\sup A > 0$) et ceci étant vrai pour tout $b \in B$ (même $b = 0$), on a $\sup B \leq \dfrac{\sup C}{\sup A}$. Finalement cela se réécrit $\boxed{\sup C \geq \sup A + \sup B}$.
Il suit que $\boxed{\sup C = \sup A \sup B}$. Pour l'inf c'est pareil mais avec $\inf A \inf B \leq a + b$
. 2.a) Non ça devient faux. Par exemple si $A = \{-1, 1\}$ et $B = [-2, 1]$ alors $C = [-2, 2]$ et $\sup C \neq \sup A \sup B$
