Correction TD 1 - Sommes

BCPST 1 | Feuilles d'exercices | Année 2022- 2023

Sommes simples

Exercice 1 : *(Apprentissage)* Ecrire à l'aide du symbole $\sum$ les sommes suivantes :
1) $1 + 2 + 3 + \ldots + 10$ **2)** $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2$ **3)** $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^n$
4) 1 - 2 + 3 - 4 + ... - 10 **5)** $n + (n+1) + \ldots + 2n$

....

Réponses : **1)** $\sum_{k=1}^{10} k$ **2)** $\sum_{i=1}^{n} k^2$ **3)** $\sum_{i=1}^{n} 2^k$ **4)** $\sum_{k=1}^{10} (-1)^{k+1}k$ **5)** $\sum_{k=n}^{2n} k$

Exercice 2 : *(En 1 minute)* On suppose $n \in \mathbb{N}$. Calculer les sommes suivantes :
1) $\sum_{i=0}^{5} i$ **2)** $\sum_{k=0}^{3} (2k-1)$ **3)** $\sum_{k=0}^{4} (-1)^k k$ **4)** $\sum_{i=0}^{n} 1$ **5)** $\sum_{k=0}^{n} 2$ **6)** $\sum_{l=0}^{n} n$ **7)** $\sum_{i=1}^{2} \ln(i)$
8) $\sum_{j=0}^{2n} (-1)^j$ **9)** $\sum_{k=0}^{n} (k+1)^2 - k^2$ **10)** $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1}} - \frac{1}{\sqrt{k}}$

....

Réponses : **1)** 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15 **2)** -1 + 1 + 3 + 5 = 8 **3)** 0-1+2-3+4 = 2
4) $n+1$ **5)** $2n+2$ **6)** $n(n+1)$ **7)** $\ln(2)$ **8)** 1 **9)** $(n+1)^2$ **10)** $\frac{1}{\sqrt{n+1}} - 1$

Exercice 3 : *(Résultats classiques)* Soit $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$, Montrer les résultats suivants par récurrence :
1) $\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ **2)** $\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{(2n+1)n(n+1)}{6}$ **3)** $\sum_{k=0}^{n} k^3 = \frac{(n(n+1))^2}{4}$ **4)** $\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$

....

Réponses : Voir le cours.

Exercice 4 : *(En 1 minute)* En utilisant les résultats de l'exercice précédent, calculer les sommes suivantes :
1) $\sum_{k=1}^{n} 2k - 1$ **2)** $\sum_{k=2}^{n} k^2 + k$ **3)** $\sum_{k=0}^{n} (k+1)^2$ **4)** $\sum_{k=0}^{n} 2^k + 3k$ **5)** $\sum_{k=0}^{n} k(k+1)(k+2)$

....

Réponses : **1)** n^2 **2)** $\frac{n(n+1)(n+2)}{3}$ **3)** $\frac{(2n+3)(n+1)(n+2)}{6}$ **4)** $2^{n+1} - 1 + \frac{3}{2}n(n+1)$
5) $\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$

Exercice 5 : *(Changement d'indice)* Remplacer les "?" par leur valeurs dans les sommes suivantes :
1) $\sum_{k=1}^{n} a_{k+1} = \sum_{j=?}^{?} a_j$ **2)** $\sum_{k=1}^{n} ka_{k-2} = \sum_{l=?}^{?} (l+2)a_l$ **3)** $\sum_{k=1}^{n+1} a_{n-k} = \sum_{k=?}^{?} a_k$
4) $\sum_{k=1}^{n} a_{2k} + \sum_{k=1}^{n} a_{2k+1} = \sum_{j=?}^{?} a_j$

....

Réponses : **1)** $\sum_{k=1}^{n} a_{k+1} = \sum_{j=0}^{n-1} a_j$ **2)** $\sum_{k=1}^{n} ka_{k-2} = \sum_{l=-1}^{n-2} (l+2)a_l$ **3)** $\sum_{k=1}^{n+1} a_{n-k} = \sum_{k=-1}^{n-1} a_k$

4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{2k} + \sum_{k=1}^{n} a_{2k+1} = \sum_{j=2}^{2n+1} a_j$

Exercice 6 : *(Changement d'indice en pratique)* Soit $m, n \in \mathbb{N}$, calculer les sommes suivantes :

1) $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} k$ **2)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (n-k)^3 + k$ **3)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k$ **4)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 5^{2k+1}$ **5)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 3^{\frac{k-2}{2}}$

....

Réponses : **1)** $\displaystyle\sum_{k=m}^{n} k = \sum_{k=0}^{n} k - \sum_{k=0}^{m-1} k = \frac{n(n+1) - m(m-1)}{2}$

2) On sépare la somme : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (n-k)^3 + k = \underbrace{\sum_{l=0}^{n} l^3}_{l=n-k} + \sum_{k=0}^{n} k = \frac{(n(n+1))^2}{4} + \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(n^2+n+2)}{4}$

3) On sépare les termes pairs et impairs $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} (-1)^k k = \sum_{k=0}^{n} 2k - \sum_{k=0}^{n-1} (2k+1) = n(n+1) - n(n-1) - n = n$

4) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 5^{2k+1} = \sum_{k=0}^{n} 5 \cdot (5^2)^k = 5 \cdot \sum_{k=0}^{n} 25^k = 5 \cdot \frac{1 - 25^{n+1}}{1 - 25} = \frac{5^{2n+3} - 5}{24}$

5) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 3^{\frac{k-2}{2}} = \sum_{k=0}^{n} (3^{\frac{1}{2}})^k \cdot 3^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \sum_{k=0}^{n} \sqrt{3}^k = \frac{1 - \sqrt{3}^{n+1}}{3 - 3\sqrt{3}}$

Exercice 7 : *(Sommes téléscopiques)* Soit $n \in \mathbb{N}$, calculer les sommes suivantes :

1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$ **2)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$ **3)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \cdot k!$ **4)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{(k+1)!}$ **5)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2}$

....

Réponses : **1)** On multiplie par la quantité conjuguée :

Cela donne : $\displaystyle\frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})} = \frac{\sqrt{k+1} - \sqrt{k}}{k+1-k} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$

Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \boxed{\sqrt{n+1} - 1}$ par téléscopage.

2) On remarque que $\displaystyle\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ Donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} = \boxed{1 - \frac{1}{n+1}}$ par télescopage.

3) On réécrit k pour faire apparaitre $k+1$: $k \cdot k! = (k+1-1) \cdot k! = (k+1)k! - k! = (k+1)! - k!$

Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \cdot k! = \boxed{(n+1)! - 1}$ par téléscopage.

4) C'est comme le précédent : $\displaystyle\frac{k}{(k+1)!} = \frac{(k+1) - 1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$ Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{(k+1)!} = \boxed{1 - \frac{1}{(n+1)!}}$

5) Il faut remarquer deux télescopages : $\displaystyle\frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2} = \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right)$.

On a $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$ et $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+2}$

Finalement on a donc $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \frac{2}{k+1} + \frac{1}{k+2} = 1 - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{n+2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)} = \boxed{\frac{n(n+3)}{2(n+1)(n+2)}}$

Doubles sommes

Exercice 8 : *(En 1 minute)* On suppose $n \in \mathbb{N}$. Calculer les doubles sommes suivantes :

1) $\displaystyle\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{3} i+j$ **2)** $\displaystyle\sum_{i=0}^{2}\left(i+\sum_{j=0}^{2} ij\right)$ **3)** $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} 1$ **4)** $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i$ **5)** $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=1}^{n} j$

6) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} 2^j i$ **7)** $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{i+2} (-1)^j$

....

Réponses : **1)** $\underbrace{(0+1+2+3)}_{i=0}+\underbrace{(1+2+3+4)}_{i=1}+\underbrace{(2+3+4+5)}_{i=2}=30$

2) $\displaystyle\sum_{i=0}^{2}\left(i+\sum_{j=0}^{2} ij\right)=\sum_{i=0}^{2} i+\sum_{i=0}^{2} i\cdot\sum_{j=0}^{2} j=1+2+(1+2)\cdot(1+2)=12$ **3)** n^2 **4)** $\dfrac{n^2(n+1)}{2}$

5) $\dfrac{n(n+1)^2}{2}$ **6)** $\dfrac{n(n+1)(2^{n+1}-1)}{2}$

7) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{i+2}(-1)^i=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i+(-1)^{i+1}+(-1)^{i+2}=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\cdot(1-1+1)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i=\frac{1-(-1)^{n+1}}{2}$

<u>Exercice 9</u> : On suppose $n\in\mathbb{N}$. Calculer les doubles sommes suivantes :

1) $\displaystyle\sum_{0\le i\le j\le n} j$ **2)** $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} 3^{i+j}$ **3)** $\displaystyle\sum_{i=0}^{2n}\sum_{j=0}^{2i}(-1)^{i+j}j$ **4)** $\displaystyle\sum_{1\le i,j\le n}\min(i,j)$ **5)** $\displaystyle\sum_{1\le i,j\le n}\max(i,j)$

6) $\displaystyle\sum_{1\le i,j\le n}|i-j|$

....

Réponses :

1) $\displaystyle\sum_{0\le i\le j\le n} j=\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j} j=\sum_{j=0}^{n} j(j+1)=\sum_{j=0}^{n} j^2+j=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}=\boxed{\frac{n(n+1)(n+2)}{3}}$

2) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} 3^{i+j}=\sum_{i=0}^{n}3^i\sum_{j=0}^{i}3^j=\sum_{i=0}^{n}3^i\frac{3^{i+1}-1}{3-1}=\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n}3^{2i+1}-3^i=\frac{1}{2}\left(3\cdot\frac{1-3^{2n+2}}{1-3^2}-\frac{1-3^{n+1}}{1-3}\right)$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\left(\frac{-3}{8}(1-9^{n+1})+\frac{1}{2}(1-3^{n+1})\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}\left(-3+3\cdot 3^{2n+2}+4-4\cdot 3^{n+1}\right)=\boxed{\frac{1-4\cdot 3^{n+1}+3^{2n+3}}{16}}$

3) $\displaystyle\sum_{i=0}^{2n}\sum_{j=0}^{2i}(-1)^{i+j}j=\sum_{i=0}^{2n}(-1)^i\sum_{j=0}^{2i}(-1)^j j=\sum_{i=0}^{2n}(-1)^i i=\boxed{n}$ voir exercice 5 question 3).

4) $\displaystyle\sum_{1\le i,j\le n}\min(i,j)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\min(i,j)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} j+\sum_{j=i+1}^{n} i\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i(i+1)}{2}+i(n-i)\right)$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(2n+1)i-i^2=\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{(2n+1)n(n+1)}{2}-\frac{(2n+1)n(n+1)}{6}\right)=\boxed{\frac{(2n+1)n(n+1)}{6}}$

5) $\displaystyle\sum_{1\le i,j\le n}\max(i,j)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\min(i,j)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} i+\sum_{j=i+1}^{n} j\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(i^2+\frac{n(n+1)}{2}-\frac{i(i+1)}{2}\right)=\dots$

La suite du calcul est laissée au lecteur.

Méthode plus astucieuse avec la question précédente et les résultats de l'exercice 7 question 4 :

$$\sum_{1\le i,j\le n}\max(i,j)=\sum_{1\le i,j\le n} i+j-\min(i,j)=n^2(n+1)-\frac{(2n+1)n(n+1)}{6}=\boxed{\frac{(4n-1)n(n+1)}{6}}$$

6) Méthode 1 : On peut faire le gros calcul :

$$\sum_{1\le i,j\le n}|i-j|=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}|i-j|=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} i-j+\sum_{j=i+1}^{n} j-i=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} i-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} j+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} j-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=i+1}^{n} i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{n} \frac{i(i+1)}{2} + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{n(n+1)}{2} - \frac{i(i+1)}{2}\right) - \sum_{i=1}^{n} i(n-i) = 2\sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{n}(i^2+i) + \frac{n^2(n+1)}{2} - n\sum_{i=1}^{n} i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} i^2 - (n+1)\sum_{i=1}^{n} i + \frac{n^2(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1)^2}{2} + \frac{n^2(n+1)}{2} = \boxed{\frac{n(n+1)(n-1)}{3}}$$

Méthode 2 : comme précédemment, on utilise le résultat du min ou du max. On sait par exemple que $\min(i,j) = \frac{1}{2}(i+j-|i-j|) \iff |i-j| = i+j-2\min(i,j)$ D'où :

$$\sum_{1\leq i,j\leq n} |i-j| = \sum_{1\leq i,j\leq n} (i+j) - 2\cdot \sum_{1\leq i,j\leq n} \min(i,j) = n^2(n+1) - 2\frac{(2n+1)n(n+1)}{6} = \boxed{\frac{(n-1)n(n+1)}{3}}$$

Exercice 10 : *(Intervertion de sommes)* On suppose $n \in \mathbb{N}$. Calculer les doubles sommes suivantes :

1) $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n} j^2$ **2)** $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n} \frac{i}{j}$ **3)** $\sum_{k=0}^{n} k2^k$ *Indication : On utilisera que* $k = \sum_{i=1}^{k} 1$

. . . .

Réponses :

1) $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n} j^2 = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j} j^2 = \sum_{j=0}^{n} j^2(j+1) = \sum_{j=0}^{n} j^3+j^2 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \boxed{\frac{n(n+1)(3n^2+7n+2)}{6}}$

2) $\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=i}^{n} \frac{i}{j} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j} \frac{i}{j} = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j}\sum_{i=0}^{j} i = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j}\cdot\frac{j(j+1)}{2} = \sum_{j=0}^{n} \frac{j+1}{2} = \frac{n(n+1)}{4} + \frac{n}{2} = \boxed{\frac{n(n+3)}{4}}$

3) $\sum_{k=0}^{n} k2^k = 0 + \sum_{k=1}^{n} k2^k = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} 2^k = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j}^{n} 2^k = \sum_{j=1}^{n} 2^j\frac{1-2^{n-j+1}}{1-2} = \sum_{j=1}^{n} 2^{n+1} - 2^j$

$= n2^{n+1} - \left(\frac{1-2^{n+1}}{1-2} - 1\right) = \boxed{(n+1)2^{n+1} - 2}$

Produit

Exercice 11 : *(Apprentissage)* Ecrire avec le symbole $\prod$ les produits suivants :

1) $1\times 2\times\ldots\times n$ **2)** $1\times 3\times 5\times\ldots\times 17$ **3)** $1\times 2\times 4\times 8\ldots\times 32$

. . . .

Réponses :

1) $1\times 2\times\ldots\times n = \prod_{k=1}^{n} k = k!$ **2)** $1\times 3\times 5\times\ldots\times 17 = \prod_{k=1}^{n} 2k+1$ **3)** $1\times 2\times 4\times 8\ldots\times 32 = \prod_{k=0}^{n} 2^k$

Exercice 12 : *(En 1 minute)* Soit $n \in \mathbb{N}$ Calculer les produits suivants :

1) $\prod_{k=1}^{3}(2k+1)$ **2)** $\prod_{k=0}^{n} k$ **3)** $\prod_{k=1}^{n} 1$ **4)** $\prod_{k=1}^{n} 2$ **5)** $\prod_{k=1}^{n} 2^n$ **6)** $\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1}$ **7)** $\prod_{k=1}^{n} 2^k$

. . . .

Réponses :

1) $\prod_{k=1}^{3}(2k+1) = 3*5*7 = 105$ **2)** $\prod_{k=0}^{n} k = 0\times 1\times 2\times\ldots = 0$ **3)** $\prod_{k=1}^{n} 1 = 1\times 1\times\ldots\times 1 = 1$ **4)** $\prod_{k=1}^{n} 2 = \underbrace{2\times 2\times\ldots\times 2}_{n \text{ fois}} = 2^n$ **5)** $\prod_{k=1}^{n} 2^n = (2^n)^n = 2^{n^2}$ **6)** $\prod_{k=1}^{n} \frac{k}{k+1} = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\ldots\times\frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}$

7) $\prod_{k=1}^{n} 2^k = 2^{\sum_{k=1}^{n} k} = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$

Exercice 13 : *(Factorielles)* Soit $n, m \in \mathbb{N}$. Ecrire les produits suivants à l'aide de notations factorielles :

1) $\prod_{k=1}^{n} k$ **2)** $\prod_{k=m+1}^{n} k$ **3)** $\prod_{k=m+1}^{n} (k^2-1)$ **4)** $\prod_{k=1}^{n} 2k$ **5)** $\prod_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k}}{(2k+1)(2k+2)}$ **6)** $\prod_{k=1}^{n} (2k+1)$

....

Réponses : **1)** $\prod_{k=1}^{n} k = n!$ **2)** $\prod_{k=m+1}^{n} k = \frac{\prod_{k=1}^{n} k}{\prod_{k=1}^{m} k} = \frac{n!}{m!}$

3) $\prod_{k=m+1}^{n} (k^2-1) = \prod_{k=m+1}^{n} (k-1)(k+1) = \prod_{k=m+1}^{n} (k-1) \cdot \prod_{k=m+1}^{n} (k+1) = \prod_{k=m}^{n-1} k \cdot \prod_{k=m+2}^{n+1} k = \frac{(n-1)!(n+1)!}{(m-1)!(m+1)!}$

4) $\prod_{k=1}^{n} 2k = 2^n \prod_{k=1}^{n} k = 2^n n!$ **5)** $\prod_{k=1}^{n} \frac{\sqrt{k}}{(2k+1)(2k+2)} = \frac{\sqrt{\prod_{k=1}^{n} k}}{\prod_{k=1}^{n} (2k+1)(2k+2)} = \frac{2\sqrt{n!}}{(2n+2)!}$

6) $\prod_{k=1}^{n} (2k+1) = \frac{\prod_{k=1}^{2n+1} k}{\prod_{k=1}^{n} 2k} = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$

Coefficiants binômiaux

Exercice 14 : *(En 1 minute)* : Calculer les nombres suivants :

1) $\binom{10}{2}$ **2)** $\binom{6}{3}$ **3)** $\binom{52}{51}$ **4)** $\binom{112}{110}$ **5)** $\binom{8}{4}$ **6)** $\binom{1003}{1005}$ **7)** $\binom{5}{-2}$

....

Réponses : **1)** $\binom{10}{2} = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ **2)** $\binom{6}{3} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 20$ **3)** $\binom{52}{51} = \binom{52}{1} = \frac{52}{1} = 52$

4) $\binom{112}{110} = \frac{112 \cdot 111}{2} = 56 \cdot 111 = 6216$ **5)** $\binom{8}{4} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 70$

6) $\binom{1003}{1005} = 0$ car $1005 > 1003$ **7)** $\binom{5}{-2} = 0$ car $-2 < 0$

Exercice 15 : *(En 1 minute)* En s'aidant du triangle de Pascal, développer les formules suivantes :

1) $(1+x)^7$ **2)** $(1-x)^5$ **3)** $(x-y)^3$ **4)** $(x+x^2)^4$ **5)** $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^6$

....

Réponses : Affichons déjà le triangle de pascal jusque $n = 7$:

n \k	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
7	1	7	21	35	35	21	7	1

1) $(1+x)^7 = x^7 + 7x^6 + 21x^5 + 35x^4 + 35x^3 + 21x^2 + 7x + 1$

2) $(1-x)^5 = (-x)^5 + 5(-x)^4 + 10(-x)^3 + 10(-x)^2 + 5(-x) + 1 = -x^5 + 5x^4 - 10x^3 + 10x^2 - 5x + 1$

3) $(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$ **4)** $(x+x^2)^4 = x^4 + 4x^3x^2 + 6x^2x^4 + 4xx^6 + x^8 = x^8 + 6x^7 + 6x^6 + 4x^5 + x^4$

5) Je propose une autre méthode pour celui ci : $\left(x^2 + \frac{1}{x}\right)^6 = \frac{1}{x^6}(1+x^3)^6$

$= \frac{1}{x^6}(x^{18} + 6x^{15} + 15x^{12} + 20x^9 + 15x^6 + 6x^3 + 1) = x^{12} + 6x^9 + 15x^6 + 20x^3 + 15 + 6x^{-3} + x^{-6}$

Exercice 16 : Calculer les sommes suivantes (1-2-3-4 faciles / 5-6-7-8 Moyennes/ 9-10 Difficiles) :

1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ **2)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}2^k$ **3)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k$ **4)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^{2k-1}$ **5)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k}$

6) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k}$ **7)** $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n}\binom{j}{i}$ **8)** $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n-i}{n-j}\binom{n}{i}$ **9)** $\displaystyle\sum_{0\leq 2k\leq n}\binom{n}{2k}$ **10)** $\displaystyle\sum_{0\leq 2k+1\leq n}\binom{n}{2k+1}$

. . . .

Réponses : **1)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = (1+1)^n = \boxed{2^n}$ **2)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{n-k}2^k = (1+2)^n = \boxed{3^n}$

3) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k = (1+(-1))^n = \boxed{0}$ **4)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}3^{2k-1} = \frac{1}{3}\sum_{k=n}^{n}\binom{n}{k}9^k = \boxed{\frac{10^k}{3}}$

5) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n}n\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k} = \boxed{n2^{n-1}}$

6) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k^2\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}nk\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=0}^{n}(k-1+1)\binom{n-1}{k-1} = n\sum_{k=0}^{n}(k-1)\binom{n-1}{k-1} + n\sum_{k=0}^{n}1\binom{n-1}{k-1}$

$\displaystyle = n\sum_{k=0}^{n}(n-1)\binom{n-2}{k-2} + n2^{n-1} = n(n-1)\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2} + n2^{n-1} = n(n-1)\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k} + n2^{n-1}$

$\displaystyle = n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} = \boxed{n(n+1)2^{n-2}}$

7) $\displaystyle\sum_{1\leq i,j\leq n}\binom{j}{i} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\binom{j}{i} = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=0}^{j}\binom{j}{i} - 1\right) = \sum_{j=1}^{n}2^j - 1 = \boxed{2^{n+1}-2-n}$

8) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n}\binom{n-i}{n-j}\binom{n}{i} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\sum_{j=0}^{n}\binom{n-i}{j} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\sum_{j=0}^{n-i}\binom{n-i}{j} = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}2^{n-i} = \boxed{3^n}$

9) On utilise (1) : $\displaystyle 2^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}$ et (2) $\displaystyle 0 = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k$. On a $\displaystyle (1)+(2) = \sum_{0\leq k\leq n}\binom{n}{k}(1+(-1)^k) = 2^n + 0$.

On a $(1+(-1)^k) = 0$ pour tout k impair, donc dans cette somme il n'y a en fait que les termes pairs qui sont non nuls : $\displaystyle 2^n = \sum_{0\leq 2k\leq n}\binom{n}{2k}(1+(-1)^{2k}) = \sum_{0\leq 2k\leq n}\binom{n}{2k}\cdot 2 = 2\sum_{0\leq 2k\leq n}\binom{n}{2k}$.

En divisant par 2 on trouve $\displaystyle\sum_{0\leq 2k\leq n}\binom{n}{2k} = \boxed{2^{n-1}}$.

10) Celui ci est plus facile quand on a fait le précédent en effet :

$$\sum_{0\leq 2k+1\leq n}\binom{n}{2k+1} + \sum_{0\leq 2k\leq n}\binom{n}{2k} = \sum_{0\leq k\leq n}\binom{n}{k} = 2^n$$

Donc $\displaystyle\sum_{0\leq 2k+1\leq n}\binom{n}{2k+1} = 2^n - \sum_{0\leq 2k\leq n}\binom{n}{2k} = 2^n - 2^{n-1} = \boxed{2^{n-1}}$

Exercice 17 : *(Classique)* Soit $(n,p)\in\mathbb{N}^2$, Montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}$.

. . . .

Réponse : En utilisant le théorème de Pascal sur les coefficients binômiaux $\displaystyle\binom{k}{p+1} + \binom{k}{p} = \binom{k+1}{p+1}$, on fait apparaitre une somme télescopique :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{p} = \sum_{k=0}^{n}\binom{k+1}{p+1} - \binom{k}{p+1} = \binom{n+1}{p+1} - \underbrace{\binom{0}{p+1}}_{=0 \text{ car } p+1>0} = \binom{n+1}{p+1}$$
