TD 4 - Applications et Fonctions

BCPST 1 — Feuille d'exercice — Année 2022- 2023

Injection / Surjection

Exercice 1 : ★ - ★★ Les fonctions suivantes sont elles injectives, surjectives bijectives ? Si elles sont bijectives, déterminer leur réciproque.

1) $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos x \end{array}\right.$ **2)** $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & \lfloor x \rfloor \end{array}\right.$ **3)** $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & |x| \end{array}\right.$ **4)** $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}\right.$

5) $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}\right.$ **6)** $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \{-1,1\} \\ x & \mapsto & (-1)^n \end{array}\right.$ **7)** $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n^2 \end{array}\right.$ **8)** $f : \left\{\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y) \end{array}\right.$

Exercice 2 : *(Composée ★)* Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to I$ deux applications.
1) Si f et g sont injectives, montrer que $f \circ g$ est injective sur J.
2) Si f est g sont surjectives, montrer que $f \circ g$ est surjective à valeur dans $\mathbb{R}$.
3) Si f est g sont bijectives, que peut-on dire de $f \circ g$?

Exercice 3 : *(Fonctions réciproques ★ - ★★)* Pour les fonctions suivantes justifier qu'elles sont bijectives en calculant la fonction réciproque. **1)** $f : [\![1,3]\!] \to [\![1,3]\!]$ avec $f(1) = 1$, $f(2) = 3$ et $f(3) = 2$.
2) $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ avec $\forall n \in \mathbb{N},\ g(n) = n+1$ **3)** $g \circ f : [\![1,3]\!] \to [\![2,4]\!]$
4) $h : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ avec $\forall n \in \mathbb{N} \left\{\begin{array}{l} h(n) = p \text{ si } n = 2p \\ h(n) = -p \text{ si } n = 2p+1 \end{array}\right.$

Exercice 4 : *(Involution ★)* **1)** Sur un graphe, tracer la première bissectrice ($y = x$), puis des droites d'équation $y = a - x$ pour plusieurs valeurs de $a \in \mathbb{R}$.
2) Montrer que la fonction $f : x \mapsto a - x$ est une involution (c'est à dire que la réciproque est égale à elle-même)
3) Expliquer pourquoi le résultat de la question 2) s'observe graphiquement.

Exercice 5 : *(Indicatrice ★★)* Soit E un ensemble. Montrer les propriétés suivantes :
1) Si $F \subset E$ alors $F = \mathbb{1}_F^{-1}(1)$ et $\overline{F} = \mathbb{1}_F^{-1}(0)$
2) Si $A, B \in P(E)$ tels que $A \cap B = \emptyset$ alors $\mathbb{1}_A + \mathbb{1}_B = \mathbb{1}_{A\cup B}$
3) Si $A, B \in P(E)$ alors $\mathbb{1}_{A\cap B} = \mathbb{1}_A \times \mathbb{1}_B$.

Ensemble de définition, d'arrivée, graphe

Exercice 6 : ♡ *)* Donner l'ensemble de définition de ces fonctions :
1) $x \mapsto \sqrt{|x-1|}$ **2)** $x \mapsto \dfrac{1}{x+2}$ **3)** $x \mapsto \dfrac{x+18}{x-21}$ **4)** $x \mapsto \sqrt{17+x}$ **5)** $x \mapsto \ln \dfrac{1}{x}$
6) $x \mapsto \sqrt{\ln x}$ **7)** $x \mapsto \sqrt{\cos x}$ **8)** $x \mapsto \dfrac{1}{\sin x}$ **9)** $x \mapsto \ln \dfrac{1}{\cos(x) - 1}$ **10)** $x \mapsto \dfrac{1}{\tan x}$
11) $x \mapsto \tan(x+1)$ **12)** $x \mapsto \tan x^2$ **13)** $x \to \tan e^x$

Exercice 7 : *(Ensemble d'Arrivée ★)* A l'aide des graphes des fonctions usuelles ou du cercle trigonométrique, déterminer les ensembles suivants : **1)** $\sin\left(\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[\right)$ **2)** $\cos\left(\left]\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\right[\right)$ **3)** $\tan\left(\left[\dfrac{-\pi}{3}, \dfrac{\pi}{4}\right]\right)$

Exercice 8 : *(Petites transformations ★)* A l'aide des graphes des fonctions usuelles, représenter les fonctions suivantes :
1) $x \to e^{-x} + 1$ **2)** $x \to \sqrt{x+1}$ **3)** $x \to \ln \dfrac{1}{x}$ **4)** $x \to \dfrac{-1}{x-1}$ **5)** $x \to -|x+2| - 1$

Exercice 9 : ★ **1)** Représenter graphiquement les fonctions suivantes sur leur domaine de définition :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{\begin{array}{l} 2 - x \text{ si } x \geq 2 \\ x^2 + 1 \text{ si } x < 2 \end{array}\right. \end{array} \quad \text{et } g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left\{\begin{array}{l} 1 + \dfrac{1}{x} \text{ si } x > 0 \\ -\sqrt{-x} \text{ si } x \leq 0 \end{array}\right. \end{array}$$

2) A l'aide du graphique, donner $f(\mathbb{R}_-)$ et $f(\mathbb{R}_+)$ ainsi que $g(]0,2]), g([1,+\infty[)$.
3) f est elle surjective ? Injective ? Déterminer deux intervalles I et J tels que $f : I \to J$ soit bijective.
4) g est elle surjective ? Injective ? Déterminer deux intervalles I et J tels que $g : I \to J$ soit bijective.

<u>Exercice 10</u> : ★★ Soit $f : x \mapsto \sqrt{x^2+x-2}$
1) Donner le domaine de définition D_f de f. **2)** Déterminer l'image de f, c'est à dire $f(D_f)$.
3) L'application f est elle injective sur D_f ?

<u>Exercice 11</u> : ★★ Soit $f : x \mapsto \dfrac{x^2-1}{2x-1}$
1) Donner le domaine de définition D_f de f. **2)** Déterminer l'image de f, c'est à dire $f(D_f)$.
3) L'application f est elle injective sur D_f ? Est elle surjective à valeur dans $\mathbb{R}$?

Etude de fonction

<u>Exercice 12</u> : ♡ Donner l'ensemble de définition, la parité et la période (si elles sont périodiques) des fonctions suivantes : **1)** $x \to \cos(2x)$ **2)** $x \to \sin\dfrac{x}{5}$ **3)** $x \to \sin^2 x$ **4)** $x \to x^2+x^4$ **5)** $x \to \tan x^2$ **6)** $x \to \dfrac{1}{x^{11}}$ **7)** $x \to \cos\dfrac{1}{x}$ **8)** $x \to \dfrac{\sin x}{\sin 3x}$ **9)** $x \to \tan|x|$ **10)** $x \to \dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$
11) $\ln\sqrt{1+x^2}$ **12)** $\ln\dfrac{1+x}{1-x}$ **13)** $x \to \dfrac{|x|}{x}$

<u>Exercice 13</u> : *(Parité* ★★ *)* Etudier la parité des fonctions suivantes :
1) $f(x) = \dfrac{e^{5x}-e^{-x}}{e^{4x}-1}$ **2)** $g(x) = \ln(x+\sqrt{1+x^2})$ **3)** $h(x) = \begin{cases} \sqrt{x} \textbf{ si } x \geq 0 \\ -\sqrt{|x|} \textbf{ si } x < 0 \end{cases}$

<u>Exercice 14</u> : *(Pour des inégalités* ★ - ★★ *)* A l'aide d'une étude de fonction, démontrer les inégalités suivantes :
1) $\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ e^x \geq 1+x$ **2)** $\forall x \in \mathbb{R}_+\ ,\ \sin x \leq x$ **3)** $\forall x > 1\ ,\ 1-\dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$
4) $\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \cos x \leq 1-\dfrac{x^2}{2}$ **5)** $\forall x \in [0,1]\ ,\ x(1-x) \leq \dfrac{1}{4}$ **6)** $\forall x > 0\ ,\ \sin x \geq x - \dfrac{x^3}{6}$

<u>Exercice 15</u> : *(* ★★ - ★★★ *)* Démontrer les inégalités suivantes :
1) $\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ e^x \geq \dfrac{x^2}{2}$ **2)** $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}\ ,\ e^x \geq \dfrac{x^n}{n!}$

<u>Exercice 16</u> : *(* ★★ *)* On souhaite déterminer la limite de la suite $u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$
1) Montrer que $\forall x > 0\ ,\ \dfrac{1}{x+1} \leq \ln(x+1)-\ln x \leq \dfrac{1}{x}$
2) En déduire un encadrement de $\dfrac{1}{x}$ pour $x > 1$.
3) En déduire la limite de u_n quand $n \to +\infty$.

<u>Exercice 17</u> : *(Asymptotes* ★ - ★★ *)* Faire un tableau de variation et donner les asymptotes des fonctions suivantes :
1) $f : x \to \dfrac{x+2}{2x+1}$ **2)** $f : x \to \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$ **3)** $f : x \mapsto \ln|\tan x|$ **4)** $f : x \to x^{-\ln x}$

<u>Exercice 18</u> : *(fonctions et sommes* ★★ - ★★★ *)* Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Etudier les variations des fonctions suivantes : **1)** $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$ **2)** $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k$ **3)** $f(x) = \displaystyle\prod_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} k$ **4)** $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \sum_{i=0}^{k} x^i$