TD - Applications et Fonctions usuelles

BCPST 1 | Feuille d'exercice | Année 2022- 2023

Injection / Surjection

Exercice 1 : Les fonctions suivantes sont elles injectives, surjectives bijectives ? Si elles sont bijectives, déterminer leur réciproque.

1) $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos x \end{array}$ **2)** $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{Z} \\ x & \mapsto & \lfloor x \rfloor \end{array}$ **3)** $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ x & \mapsto & |x| \end{array}$ **4)** $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}$

5) $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z} \\ n & \mapsto & n+1 \end{array}$ **6)** $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{N} & \to & \{-1,1\} \\ x & \mapsto & (-1)^n \end{array}$ **7)** $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{Z} & \to & \mathbb{N} \\ n & \mapsto & n^2 \end{array}$ **8)** $f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y) \end{array}$

. . . .

Réponses :

Qu	Fonction	Injective	Surjective	Bijective	Réciproque
1)	$x \to \cos x$	Non	Non	Non	/
2)	$x \to \lfloor x \rfloor$	Non	Oui	Non	/
3)	$x \to \lvert x \rvert$	Non	Oui	Non	/
4)	$n \mapsto n+1$	Oui	Non	Non	/
5)	$n \mapsto n+1$	Oui	Oui	Oui	$n \mapsto n-1$
6)	$x \mapsto (-1)^n$	Non	Oui	Non	/
7)	$n \mapsto n^2$	Non	Oui	Non	/
8)	$(x,y) \mapsto (x+y, x-y)$	Oui	Oui	Oui	$(x,y) \mapsto \left(\dfrac{x+y}{2}, \dfrac{x-y}{2}\right)$

Exercice 2 : *(Composée)* Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to I$ deux applications.

1) Si f et g sont injectives, montrer que $f \circ g$ est injective sur J.
2) Si f est g sont surjectives, montrer que $f \circ g$ est surjective à valeur dans $\mathbb{R}$.
3) Si f est g sont bijectives, que peut-on dire de $f \circ g$?
4) Montrer que si $f \circ g$ est injective alors g est injective.
5) Montrer que si $f \circ g$ est surjective alors f est surjective.

. . . .

Réponses :

1) On a $\forall x, y \in J,\ f \circ g(x) = f \circ g(y) \iff f(\ g(x)\ ) = f(\ g(y)\ ) \underbrace{\implies}_{f \text{ injective}} g(x) = g(y) \underbrace{\implies}_{g \text{ injective}} x = y.$

Donc par définition de l'injectivité, $f \circ g$ est injective.

2) Comme g est surjective, on a $g(J) = I$. On a donc $f \circ g(J) = f(g(J)) = f(I) = \mathbb{R}$ car f est surjective.
Je n'ai pas prouvé en cours que $f \circ g(J) = f(g(I))$. Prouvons le maintenant.
On a $y \in f \circ g(J) \iff \exists x \in J \mid y = f(g(x)) \iff \exists z \in g(J) \mid y = f(z) \iff y \in f(g(J))$
Donc les calcul plus haut est valable et $f \circ g$ est bien surjective à valeur dans $\mathbb{R}$.

3) $f \circ g$ est bijective : injective d'après la question 1) et surjective d'après la question 2).

4) Si $f \circ g$ est injective alors soit $x, y \in J$.
On a $g(x) = g(y) \implies f(g(x)) = f(g(y)) \underbrace{\implies}_{f \circ g \text{ injective}} x = y$ donc g est injective.

5) On a $g(J) \subset I \implies f(g(J)) \subset f(I) \implies f \circ g(J) \subset f(I) \implies \mathbb{R} \subset f(I)$.
Donc $f(I) = \mathbb{R}$ et f est surjective.

Exercice 3 : *(Fonctions réciproques)* Pour les fonctions suivantes justifier qu'elles sont bijectives en calculant

la fonction réciproque. **1)** $f : [\![1,3]\!] \to [\![1,3]\!]$ avec $f(1)=1$, $f(2)=3$ et $f(3)=2$.
2) $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}^*$ avec $\forall n\in\mathbb{N},\ g(n)=n+1$ **3)** $g\circ f : [\![1,3]\!] \to [\![2,4]\!]$
4) $h:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ avec $\forall n\in\mathbb{N}\left\{\begin{array}{l} h(n)=p \text{ si } n=2p \\ h(n)=-p \text{ si } n=2p+1\end{array}\right.$

. . . .

Réponses : Dans chacune des questions il suffit de trouver une fonction réciproque pour montrer qu'elle est bijective.
1) On remarque que $f^{-1}=f$. **2)** On a $g^{-1}(n)=n-1$
3) On a $(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}=f\circ g^{-1} : n\to f(n-1)$
4) On a $h^{-1}(p)=\left\{\begin{array}{l} 2p \text{ si } p\geq 0 \\ -2p+1 \text{ si } p<0\end{array}\right. = 2|p|-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{|p|}{p}-1\right)$.

Exercice 4 : *(Involution)* **1)** Sur un graphe, tracer la première bissectrice ($y=x$), puis des droites d'équation $y=a-x$ pour plusieurs valeurs de $a\in\mathbb{R}$.
2) Montrer que la fonction $f : x\mapsto a-x$ est une involution (c'est à dire que la réciproque est égale à elle-même)
3) Expliquer pourquoi le résultat de la question 2) s'observe graphiquement.

. . . .

Réponses : **1)** Ce sont les droites perpendiculaires à $y=x$.
2) On a $f(f(x))=a-(a-x)=a-a+x=x$
3) On voit que la droite $y=a-x$ est symétrique par rapport à la première bissectrice.

Exercice 5 : *(Indicatrice)* Soit E un ensemble. Montrer les propriétés suivantes :
1) Si $F\subset E$ alors $F=\mathbb{1}_F^{-1}(1)$ et $\overline{F}=\mathbb{1}_F^{-1}(0)$
2) Si $A,B\in P(E)$ tels que $A\cap B=\emptyset$ alors $\mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B=\mathbb{1}_{A\cup B}$
3) Si $A,B\in P(E)$ alors $\mathbb{1}_{A\cap B}=\mathbb{1}_A\times\mathbb{1}_B$.

. . . .

Réponses : **1)** Voir le cours **2)** Si $x\notin A\cup B$ alors $\mathbb{1}_A(x)+\mathbb{1}_B(x)=0=\mathbb{1}_{A\cup B}(x)$.
Si $x\in A\cup B$ alors soit $x\in A$ et $\mathbb{1}_A(x)=1=\mathbb{1}_{A\cup B}(x)$ et $\mathbb{1}_B(x)=0$ donc l'égalité est vraie. Sinon, $x\in B$ et c'est vrai aussi par symétrie de A et B. On a bien, $\forall x\in E$, $\mathbb{1}_A(x)+\mathbb{1}_B(x)=\mathbb{1}_{A\cup B}(x)$ donc $\mathbb{1}_A+\mathbb{1}_B=\mathbb{1}_{A\cup B}$.
3) $\mathbb{1}_{A\cap B}(x)=1 \iff x\in A\cap B \iff x\in A$ et $x\in B \iff \mathbb{1}_A(x)\times\mathbb{1}_B(x)=1$. Donc $\mathbb{1}_{A\cap B}=\mathbb{1}_A\times\mathbb{1}_B$.

Ensemble de définition, d'arrivée, graphe

Exercice 6 : *(En 1 minute)* Donner l'ensemble de définition de ces fonctions :
1) $x\mapsto\sqrt{|x-1|}$ **2)** $x\mapsto\dfrac{1}{x+2}$ **3)** $x\mapsto\dfrac{x+18}{x-21}$ **4)** $x\mapsto\sqrt{17+x}$ **5)** $x\mapsto\ln\dfrac{1}{x}$
6) $x\mapsto\sqrt{\ln x}$ **7)** $x\mapsto\sqrt{\cos x}$ **8)** $x\mapsto\dfrac{1}{\sin x}$ **9)** $x\mapsto\ln\dfrac{1}{\cos(x)-1}$ **10)** $x\mapsto\dfrac{1}{\tan x}$
11) $x\to\tan(x+1)$ **12)** $x\mapsto\tan x^2$ **13)** $x\to\tan e^x$

. . . .

Réponses : **1)** $\mathbb{R}$ **2)** $\mathbb{R}\backslash\{-2\}$ **3)** $\mathbb{R}\backslash\{21\}$ **4)** $[-17,+\infty[$ **5)** $\mathbb{R}^*$
6) $[1,+\infty[$ **7)** $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}}\left[\dfrac{-\pi}{2}+2k\pi,\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\right]$ **8)** $\mathbb{R}\backslash\{k\pi\mid k\in\mathbb{Z}\}$ **9)** $\emptyset$ **10)** $\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{k\pi}{2}\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$
11) $\mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi-1\mid k\in\mathbb{Z}\right\}$ **12)** $\mathbb{R}\backslash\left\{\pm\sqrt{\dfrac{\pi}{2}+k\pi}\mid k\in\mathbb{N}\right\}$ **13)** $\mathbb{R}\backslash\left\{\ln\left(\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right)\mid k\in\mathbb{N}\right\}$

Exercice 7 : *(ensemble d'arrivée)* A l'aide des graphes des fonctions usuelles ou du cercle trigonométrique, déterminer les ensembles suivants : **1)** $\sin\left(\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right[\right)$ **2)** $\cos\left(\left]\dfrac{\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4}\right[\right)$ **3)** $\tan\left(\left[\dfrac{-\pi}{3},\dfrac{\pi}{4}\right]\right)$

. . . .

Réponses :

1) $\sin\left(\left[0,\frac{\pi}{2}\right[\right) = [0,1[$ **2)** $\cos\left(\left]\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right[\right) = \left[-1,\frac{\sqrt{2}}{2}\right[$ **3)** $\tan\left(\left[\frac{-\pi}{3},\frac{\pi}{4}\right]\right) = [-\sqrt{3},1]$

<u>Exercice 8</u> : *(Petites transformations)* A l'aide des graphes des fonctions usuelles, représenter les fonctions suivantes :

1) $x \to e^{-x}+1$ **2)** $x \to \sqrt{x+1}$ **3)** $x \to \ln\frac{1}{x}$ **4)** $x \to \frac{-1}{x-1}$ **5)** $x \to -|x+2|-1$

. . . .

Réponses : vérifiez vous-même en vous aidant de calculatrices.

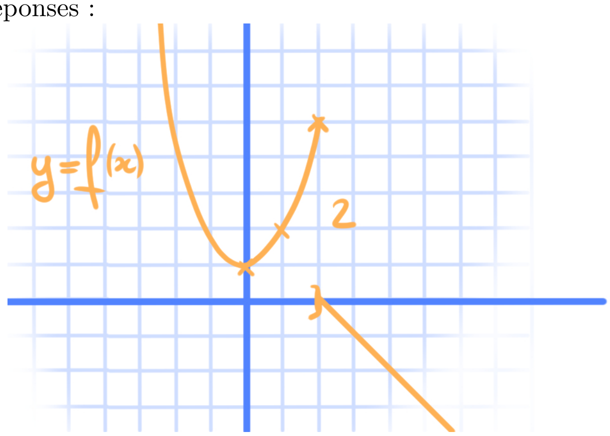
<u>Exercice 9</u> : **1)** Représenter graphiquement les fonctions suivantes sur leur domaine de définition :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 2-x \text{ si } x \geq 2 \\ x^2+1 \text{ si } x < 2 \end{cases} \end{array} \quad \text{et } g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1+\frac{1}{x} \text{ si } x > 0 \\ -\sqrt{-x} \text{ si } x \leq 0 \end{cases} \end{array}$$

2) A l'aide du graphique, donner $f(\mathbb{R}_-)$ et $f(\mathbb{R}_+)$ ainsi que $g(]0,2]), g([1,+\infty[)$.
3) f est elle surjective ? Injective ? Déterminer deux intervalles I et J tels que $f : I \to J$ soit bijective.
4) g est elle surjective ? Injective ? Déterminer deux intervalles I et J tels que $g : I \to J$ soit bijective.

. . . .

Réponses :



1)
2) $f(\mathbb{R}_-) = [1,+\infty[$ et $f(\mathbb{R}_+) =]-\infty,0[\cup[1,4]$.
On a $g([0,2]) = \{0\} \cup \left[\frac{3}{2},+\infty\right[$ et $g([1,+\infty[) = [2,1[$
3) f n'est pas injective car $f(-1) = f(1) = 2$ et elle n'est pas surjective car 0 n'admet pas d'antécédent par f. Il y a plusieurs moyens de rendre f bijective :
$f : [2,+\infty[\to \mathbb{R}_-^*$ est bijective.
$f : \mathbb{R}_- \to [1,+\infty[$ est bijective.
$f : [0,2] \to [1,5]$ est bijective.
4) g est injective car Si $g(x) = g(y)$ si $g(x) \leq 0$ alors on a $g(x) = -\sqrt{-x} = g(y) = -\sqrt{-y}$ d'où $x = y$. Si $g(x) > 0$ alors $g(x) = 1+\frac{1}{x} = g(y) = 1+\frac{1}{y}$ donc $x = y$. Donc g est injective. g n'est pas surjective car 1 n'admet pas d'antécédent par g. Il y a plusieurs moyens de rendre g bijective :
$g : \mathbb{R}_- \to \mathbb{R}_-$ est bijective.
$g : \mathbb{R}_+^* \to]1,+\infty[$ est bijective.

<u>Exercice 10</u> : Soit $f : x \mapsto \sqrt{x^2+x-2}$
1) Donner le domaine de définition D_f de f. **2)** Déterminer l'image de f, c'est à dire $f(D_f)$.
3) L'application f est elle injective sur D_f ?

. . . .

Réponses : **1)** On résout $x^2 + x - 2 \geq 0$. On a $\Delta = 9$, $x_1 = -2$ et $x_2 = -1$ donc c'est vrai pour tout $x \in]-\infty, -2] \cup [1, +\infty[$ donc $D_f =]-\infty, -2] \cup [1, +\infty[$.
2) On sait que $f(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et le minimum de f est 0 car $f \geq 0$ et $f(1) = 0$ donc $f(D_f) = \mathbb{R}_+$.
3) f n'est pas injective car $f(-2) = f(1) = 0$

Exercice 11 : Soit $f : x \mapsto \dfrac{x^2 - 1}{2x - 1}$
1) Donner le domaine de définition D_f de f. **2)** Déterminer l'image de f, c'est à dire $f(D_f)$.
3) L'application f est elle injective sur D_f est elle surjective à valeur dans $\mathbb{R}$?
. . . .

Réponses : **1)** $D_f = \mathbb{R} \backslash \left\{ \dfrac{1}{2} \right\}$
2) On fait une étude de la fonction f.
On a $f'(x) = \dfrac{2x(2x-1) - 2(x^2-1)}{(2x-1)^2} = \dfrac{4x^2 - 2x - 2x^2 + 2}{(2x-1)^2} = \dfrac{2x^2 - 2x + 2}{(2x-1)^2} = 2\dfrac{x^2 - x + 1}{(2x-1)^2}$ On résout $x^2 - x + 1 \geq 0$: On a $\Delta = 1 - 3 = -3 < 0$ Donc $f' > 0$ et f est strictement croissante sur son domaine de définition. On en déduit son tableau de variation :

x	0	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	‖	$+$
$f(x)$	$-\infty \nearrow +\infty$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

On voit donc que $f(D_f) = \mathbb{R}$.
Remarque : en étudiant les limites de f en $+\infty$ et en $\dfrac{1}{2}$ cela aurait suffit pour conclure.
3) D'après le tableau de variation, f est surjective mais pas injective.

Etude de fonction

Exercice 12 : *(En 1 minute)* Donner l'ensemble de définition, la parité et la période (si elles sont périodiques) des fonctions suivantes : **1)** $x \to \cos(2x)$ **2)** $x \to \sin \dfrac{x}{5}$ **3)** $x \to \sin^2 x$ **4)** $x \to x^2 + x^4$
5) $x \to \tan x^2$ **6)** $x \to \dfrac{1}{x^{11}}$ **7)** $x \to \cos \dfrac{1}{x}$ **8)** $x \to \dfrac{\sin x}{\sin 3x}$ **9)** $x \to \tan |x|$ **10)** $x \to \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
11) $\ln \sqrt{1 + x^2}$ **12)** $\ln \dfrac{1+x}{1-x}$ **13)** $x \to \dfrac{|x|}{x}$
. . . .

Réponses : **1)** $D_f = \mathbb{R}$, f est paire et π-périodique **2)** $D_f = \mathbb{R}$, f est impaire et 10π-périodique
3) $D_f = \mathbb{R}$, f est paire et π-périodique **4)** $D_f = \mathbb{R}$, f est paire
5) $D_f = \mathbb{R} \backslash \left\{ \pm\sqrt{\dfrac{\pi}{2} + k\pi} \mid \pi \in \mathbb{N} \right\}$. f est paire et non périodique.
6) $D_f = \mathbb{R}^*$, f est impaire **7)** $D_f = \mathbb{R}^*$, f est paire
8) $D_f = \mathbb{R}^*$ et f est paire et 2π périodique
9) $D_f = \mathbb{R} \backslash \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi \mid \pi \in \mathbb{Z} \right\}$ et f est paire, non périodique.
10) $D_f = \mathbb{R}$ et f est impaire. **11)** $D_f = \mathbb{R}$ et f est paire
12) $D_f =]-1, 1[$ et f est impaire **13)** $D_f = \mathbb{R}^*$ et f est paire.

<u>Exercice 13</u> : *(Parité)* Etudier la parité des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \dfrac{e^{5x} - e^{-x}}{e^{4x} - 1}$ **2)** $g(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ **3)** $h(x) = \begin{cases} \sqrt{x} \textbf{ si } x \geq 0 \\ -\sqrt{|x|} \textbf{ si } x < 0 \end{cases}$

....

Réponses : **1)** $f(-x) = \dfrac{e^{-5x} - e^{x}}{e^{-4x} - 1} = \dfrac{1}{e^{-4x}} \dfrac{e^{-5x} - e^{x}}{1 - e^{4x}} = e^{4x} \dfrac{e^{-5x} - e^{x}}{1 - e^{4x}} = \dfrac{e^{-x} - e^{5x}}{1 - e^{4x}} = \dfrac{e^{5x} - e^{-x}}{e^{4x} - 1} = f(x)$

Donc $\boxed{f \text{ est paire}}$.

2) $g(-x) = \ln(-x+\sqrt{1+x^2}) = \ln \dfrac{(-x+\sqrt{1+x^2})(x+\sqrt{1+x^2})}{x+\sqrt{1+x^2}} = \ln \dfrac{-x^2+1+x^2}{x+\sqrt{1+x^2}} = \ln \dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}$

$= -\ln(x+\sqrt{1+x^2}) = -g(x)$ Donc $\boxed{g \text{ est impaire}}$.

3) $h(-x) = \begin{cases} \sqrt{-x} \textbf{ si } -x \geq 0 \\ -\sqrt{|-x|} \textbf{ si } -x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{-x} \textbf{ si } x \leq 0 \\ -\sqrt{|-x|} \textbf{ si } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{|x|} \textbf{ si } x \leq 0 \\ -\sqrt{x} \textbf{ si } x > 0 \end{cases} = \begin{cases} \sqrt{|x|} \textbf{ si } x < 0 \\ -\sqrt{x} \textbf{ si } x \geq 0 \end{cases}$

$= \begin{cases} -h(x) \textbf{ si } x < 0 \\ -h(x) \textbf{ si } x \geq 0 \end{cases} = -h(x)$. Donc $\boxed{h \text{ est impaire.}}$

<u>Exercice 14</u> : *(Pour des inégalités)* A l'aide d'une étude de fonction, démontrer les inégalités suivantes :

1) $\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ e^x \geq 1+x$ **2)** $\forall x \in \mathbb{R}_+\ ,\ \sin x \leq x$ **3)** $\forall x > 1\ ,\ 1 - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$

4) $\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \cos x \leq 1 - \dfrac{x^2}{2}$ **5)** $\forall x \in [0,1]\ ,\ x(1-x) \leq \dfrac{1}{4}$ **6)** $\forall x \in \mathbb{R}_+\ ,\ \sin x \geq x - \dfrac{x^3}{6}$

....

Réponses : **1)** On pose $f(x) = e^x - 1 - x$ définie et déribale sur $\mathbb{R}$. On a $f'(x) = e^x - 1 \geq 0 \iff e^x \geq 1 \iff x \geq 0$. On en déduit le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$e-2$	$\nearrow$	$+\infty$

On a $e-2 \geq 0$ donc on voit que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$ donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ e^x \geq 1+x}$

2) Comme $\sin x \in [-1,1]$, on a $\forall x \geq 1\ ,\ \sin x \leq 1 \leq x$ Donc c'est vérifié si $x \in [1,+\infty[$.
Maintenant pour $x \in [0,1[$, posons $f(x) = \sin x - x$. On alors $f'(x) = \cos x - 1 \leq 0$. Donc f est décroissante et $\forall x \in [0,1[\ ,\ f(x) \leq f(0) = 0$ Donc $f(x) \leq 0$
On a bien $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}_+\ ,\ \sin x \leq x}$.

3) On pose $f(x) = \ln(1+x) - x$ et $g(x) = \ln(1+x) - 1 + \dfrac{x^2}{2}$ définies et dérivables sur $]-1,+\infty[$

On a $f'(x) = \dfrac{1}{1+x} - 1 = \dfrac{-x}{1+x}$. Donc $f(x) \geq 0 \iff x \leq 0$

On a $g'(x) = \dfrac{1}{1+x} + x = \dfrac{1+x+x^2}{1+x}$. Donc $g(x) \geq 0 \iff 1+x+x^2 \geq 0$. Ici on a $\Delta = -3$ donc $g(x) \geq 0$ pour tout $x > -1$.

On en déduit les tableaux de variation :

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$?$

x	-1		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

On a donc $\forall x > -1\ ,\ f(x) \geq 0$ et $\forall x > 1\ ,\ g(x) > g(1) = \ln(2) - \dfrac{1}{2} \geq 0$

Donc $\boxed{\forall x > 1\ ,\ 1 - \dfrac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x}$.

4) On pose $f(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2}$ définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ On a $f'(x) = -\sin x + x$.
On a montré pour la question 2) que $f'(x) \geq 0$ sur $\mathbb{R}_+$, par ailleurs, comme f est paire, on en déduit le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$			0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

On a donc $\forall x \in \mathbb{R},\ ,f'(x) \geq 0$ et donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ \cos x \leq 1 - \dfrac{x^2}{2}}$.

5) On pose $f(x) = x(1-x) = x - x^2$. Comme f est un polynôme de degré 2 on sait qu'elle admet un maximum (car le coefficient dominant $a = -1$ est négatif) en $\dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-1}{-2} = \dfrac{1}{2}$.

Donc $\forall x \in [0,1]\ ,\ f(x) \leq f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{4}$ donc $\boxed{\forall x \in [0,1]\ ,\ x(1-x) \leq \dfrac{1}{4}}$

6) On pose $f(x) = \sin x - x + \dfrac{x^3}{6}$. On a f définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $f'(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2} \geq 0$ d'après la question 4). Donc f est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et $\forall x \geq 0\ ,\ f(x) \geq f(0) = 0$

Donc $\boxed{\forall x \geq 0\ ,\ \sin x \geq x - \dfrac{x^3}{6}}$

Exercice 15 : On souhaite déterminer la limite de la suite $u_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$

1) Montrer que $\forall x > 0\ ,\ \dfrac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln x \leq \dfrac{1}{x}$

2) En déduire un encadrement de $\dfrac{1}{x}$ pour $x > 1$.

3) En déduire la limite de u_n quand $n \to +\infty$.

....

Réponses : **1)** On fait une étude de fonction.
On pose $f(x) = \ln(x+1) - \ln(x) - \dfrac{1}{x+1}$ et $g(x) = \ln(x+1) - \ln(x) - \dfrac{1}{x}$. On a f et g définies et dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$. Pour $x > 0$, on a :

$f'(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{(x+1)^2} = \dfrac{x(x+1) - (x+1)^2 + x}{x(x+1)^2} = \dfrac{x^2 + x - x^2 - 2x - 1 + x}{x(x+1)^2} = \dfrac{-1}{x(x+1)^2} \leq 0$

et $g'(x) = \dfrac{1}{x+1} - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{-1}{x(x+1)} + \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{1}{x^2(x+1)} \geq 0$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	
$f(x)$	$?$ $\searrow$	0

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	
$g(x)$	$?$ $\nearrow$	0

On a bien $f(x) = \ln\left(1 - \dfrac{1}{x}\right) - \dfrac{1}{x+1} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et de même $g(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ Cela donne d'après les tableaux de variation $f(x) \geq 0$ et $g(x) \leq 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ d'où le résultat : $\boxed{\forall x > 0\ ,\ \dfrac{1}{x+1} \leq \ln(x+1) - \ln x \leq \dfrac{1}{x}}$

2) On a $\boxed{\forall x > 1, \ln x - \ln(x-1) \leq \dfrac{1}{x} \leq \ln(x+1) - \ln x}$

3) On a l'encadrement suivant : $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \ln k - \ln(k-1) \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=n+1}^{2n} \ln(k+1) - \ln k$

On reconnait des sommes télescopiques, on a donc :

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ln(2n) - \ln(n) \leq u_n \leq \ln(2n+1) - \ln(n+1)$ Cela donne $\ln 2 \leq u_n \leq \ln \dfrac{2n+1}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln 2$

Donc $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln 2}$ par encadrement.

<u>Exercice 16</u> : *(Asymptotes)* Faire un tableau de variation et donner les asymptotes des fonctions suivantes :

1) $f : x \to \dfrac{x+2}{2x+1}$ **2)** $f : x \to \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$ **3)** $f : x \mapsto \ln|\tan x|$ **4)** $f : x \to x^{-\ln x}$

. . . .

1) $f : x \to \dfrac{x+2}{2x+1}$ est définie et dérivable sur $D_f = \mathbb{R}\backslash\left\{\dfrac{-1}{2}\right\}$.

On a $f'(x) = \dfrac{(2x+1) - 2(x+2)}{(2x+1)^2} = \dfrac{-3}{(2x+1)^2} \leq 0$. D'où le tableau de variation :

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|$	$-$	
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	$-\infty$ $\|$ $+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$

f admet deux asymptotes : horizontale d'équation $\boxed{y = \dfrac{1}{2}}$ et verticale d'équation $\boxed{x = \dfrac{-1}{2}}$

2) $f : x \to \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$ est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}$. Comme f est paire, on peut se contenter de l'étudier sur $\mathbb{R}_+\{1\}$.

On a $f(x) = \dfrac{2 + (-1 + x^2)}{1 - x^2} = \dfrac{2}{1-x^2} - 1$ Donc f est décroissante sur $\mathbb{R}_+$.

x	0		1		$+\infty$
$f(x)$	1	$\nearrow$	$+\infty$ $\|$ $-\infty$	$\nearrow$	-1

f admet donc les asymptotes verticales $\boxed{x=1}$ et $\boxed{x=-1}$ (par parité) et horizontale $\boxed{y=-1}$

3) $f : x \mapsto \ln|\tan x|$ est définie sur $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{R}\right\}$. La fonction étant paire et π-périodique, on peut simplement l'étudier sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. On a $\forall x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $f(x) = \ln \tan x$ donc f est (strictement) croissante.

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

Les asymptotes sont donc les droites verticales d'équations $\boxed{x = \frac{k\pi}{2} \text{ où } k \in \mathbb{Z}}$.

4) $f : x \to x^{-\ln x}$.
On a $f(x) = e^{-(\ln x)^2}$ qui est définie et dérivable sur $D_f = \mathbb{R}_+^*$.
On a $f'(x) = \dfrac{-2\ln x}{x} e^{-(\ln x)^2}$ donc $f'(x) > 0 \iff \ln x < 0 \iff x < 1$. Le tableau de variation est donc :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Remarque : on a $\ln x \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$ donc $(\ln x)^2 \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$ et $-(\ln x)^2 \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} -\infty$.
Donc finalement $f(x) = e^{-(\ln x)^2} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$. f admet uniquement l'asymptote horizontale d'équation $\boxed{y=0}$.

<u>**Exercice 17**</u> **:** Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé. Etudier les variations des fonctions suivantes :

1) $f(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k$ **2)** $f(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k$ **3)** $f(x) = \prod_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} k$ **4)** $f(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \sum_{i=0}^{k} x^i$

....

1) f est clairement dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une somme de fonctions dérivables. On a $f(x) = \dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}$ et donc pour tout $x \neq 1$, on a $f'(x) = \dfrac{(n+1)x^{n+1}(x-1) - (x^{n+1}-1)}{(x-1)^2} = \dfrac{nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1}{(x-1)^2}$
Donc étudier le signe de f' revient à étudier le signe de $g(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$.
g est clairement dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = n(n+1)x^n - n(n+1)x^{n-1} = n(n+1)x^{n-1}(x-1)$.

Le signe de g' dépend de la parité de n :

Si n est pair :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x^{n-1}		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc les variations de g sont :

x	$-\infty$		α		0		1		$+\infty$
$g'(x)$			$+$		0	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	1	↘	0	↗	$+\infty$

avec $\alpha < 0$ le seul réel tel que $g(\alpha) = 0$ qui existe d'après le théorème des valeur intermédiaires.

On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(\alpha)$	↗	$+\infty$

Si n est impair :

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x^{n-1}		$+$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	

Donc les variations de g sont :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

2) On se ramène à la question précédente, en étudiant $f(-x)$. Par symétrie les tableaux de variations sont :

Si n est pair :

On en déduit le tableau de variations de f :

x	$-\infty$		$-\alpha$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$f(-\alpha)$	↗	$+\infty$

Si n est impair :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$

3) C'est un peu plus bizarre, mais aussi plus simple que les deux questions précédentes.

On a en fait $f(x) = \prod_{k=1}^{\lfloor x \rfloor} k = (\lfloor x \rfloor)!$. Or, si $m \geq n \in \mathbb{N}$, on a $m! \geq n!$ car $\dfrac{m!}{n!} = \prod_{k=n+1}^{m} k \geq 1$.
Ainsi en revenant à la définition de la monotonie,
on a $y > x \implies \lfloor y \rfloor \geq \lfloor x \rfloor \implies (\lfloor y \rfloor)! \geq (\lfloor x \rfloor)! \implies f(x) \geq f(y)$.
Ainsi $\boxed{f \text{ est croissante}}$. (pas strictement car $f(0) = f(0,5) = 1$).

4) Déjà, remarquons que si $x < 0$, alors $\lfloor x \rfloor < 0 \implies f(x) = 0$ car la somme "$\sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor}$" est vide.

Donc f est constante sur $\mathbb{R}_-^*$. Ca va nous ôter une sacré épine du pied.

Remarquons ensuite que si $x \in [0,1[$, alors $f(x) = \sum_{k=0}^{0} \sum_{i=0}^{k} x^i = \sum_{i=0}^{0} x^i = x^0 = 1$ donc f est aussi constante sur $[0,1[$.

Ensuite revenons à la définition de la monotonie pour étudier les variations de f.
Supposons $x, y \in [1, +\infty[$ tels que $y > x$.
Alors $\forall i \in \mathbb{N}^*$, $y^i > x^i \implies \forall k \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{i=0}^{k} y^i > \sum_{i=0}^{k} x^i \implies \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \sum_{i=0}^{k} y^i > \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \sum_{i=0}^{k} x^i$ car $\lfloor x \rfloor \geq 1$.
Or par croissance de la partie entière, on a $\lfloor y \rfloor \geq \lfloor x \rfloor \implies \sum_{k=0}^{\lfloor y \rfloor} \sum_{i=0}^{k} y^i \geq \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \sum_{i=0}^{k} y^i > \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} \sum_{i=0}^{k} x^i$ car ce sont des sommes qui ne contiennent que des termes positifs. Ainsi $f(y) > f(x)$.

Conclusion $\boxed{f \text{ est croissant sur } \mathbb{R}}$.
Plus précisément $\boxed{f \text{ est constante sur } \mathbb{R}_-\text{, constante sur } [0,1[\text{ et strictement croissante sur } [1,+\infty[}$.
