

# TD5 - Intégrales

1BCPST 2

Feuille d'exercice

Année 2023- 2024

**Exercice 1 :** ♡ : Calculer les intégrales suivantes :

1)  $\int_0^1 x^2 dx$     2)  $\int_{-2}^2 x^{17} dx$     3)  $\int_{-1}^1 \tan x dx$     4)  $\int_0^\pi \cos(x) + \sin(x) dx$   
5)  $\int_0^1 5x^5 + 2x^4 - 3x^2 + 6x + 1 dx$     6)  $\int_0^1 2^x dx$     7)  $\int_0^n x^n dx$     8)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} dx$     9)  $\int_0^5 |x-2| dx$   
10)  $\int_{-1}^\pi [x] dx$     11)  $\int_{-2}^3 \frac{|x|}{x} dx$

**Exercice 2 :** ★ - ★★ Calculer les intégrales suivantes :

1)  $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x} dx$     2)  $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} dx$     3)  $\int_{-1}^0 \frac{x}{1+x^2} dx$     4)  $\int_0^2 (x+1)(x-2)^5 dx$     5)  $\int_0^1 \frac{x+5}{x^2+10x+17} dx$   
6)  $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x+\sqrt{x+2}}} dx$     7)  $\int_{-1}^1 \frac{|x|}{\sqrt{x+2}} dx$     8)  $\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} dx$     9)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x dx$     10)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x) \sin(3x) dx$   
11)  $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan x} dx$     12)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x + \tan^3 x dx$     13)  $\int_0^{2\pi} \max(\cos x, \sin x) dx$     14)  $\int_0^{2\pi} \min(\cos x, \sin x) dx$

**Exercice 3 :** (Calcul de primitive ★ - ★★ ) Calculer une primitive pour les fonctions suivantes :

1)  $f(x) = \ln \frac{1}{x}$     2) Si  $\alpha > 0$ ,  $f(x) = \alpha^x$     3)  $f(x) = \sin^2(x)$     4)  $f(x) = xe^x$     5)  $f(x) = \arctan x$

**Exercice 4 :** (IPP ★ - ★★ ) Calculer les intégrales suivantes :

1)  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos t dt$     2)  $\int_0^1 t^2 e^t dt$     3)  $\int_1^2 \frac{\ln t}{t} dt$     4)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t}{\cos^2 t} dt$

**Exercice 5 :** (Avec des fractions ★★ ) Calculer les intégrales suivantes :

1)  $\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)} dx$     2)  $\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2 - 4x + 3} dx$     3)  $\int_2^3 \frac{1}{x(x-1)^2} dx$     4)  $\int_1^2 \frac{1}{(x^2+1)x} dx$   
5)  $\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2+2x+2} dx$

**Exercice 6 :** (Changement de variable ★ - ★★ - ★★★ ) Calculer les intégrales suivantes :

1)  $\int_e^x \frac{\ln(\ln t)}{t} dt$     2)  $\int_0^x e^{2t} \cos(e^t) dt$     3)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^4 x dx$     4)  $\int_e^x \frac{\ln t dt}{t + t(\ln t)^2}$     5)  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + \sin x} dx$

**Exercice 7 :** (Intégrales et sommes ★ - ★★ ) Calculer les intégrales suivantes :

1)  $\int_0^1 \sum_{k=1}^n (k+1)x^k dx$     2)  $\sum_{k=1}^n \int_0^1 \frac{1}{x+k} dx$     3)  $\int_0^n \sum_{k=1}^n |x-k| dx$   
4) Avec un calcul d'intégrales, montrer que  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,  $\sum_{i=0}^n \binom{n}{k} \frac{x^{k+1}}{k+1} = \frac{(1+x)^{n+1} - 1}{n+1}$ .

**Exercice 8 : ★★** On pose  $f(x) = \int_0^x t - [t] dt$

- 1) Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- 2) Calculer  $f(x)$  sur  $[0, 1]$
- 3) Pour tout  $x \in \mathbb{R}$ , Calculer la valeur de  $f(x+1) - f(x)$ .
- 4) En déduire grossièrement le graphe de  $f$ .

**Exercice 9 : ★★** On pose  $f(x) = \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t} dt$

- 1) Calculer  $f'(x)$ . Quel est son domaine de définition?
- 2) Quelle est la parité de  $f'$ ?
- 3) En déduire le tableau de variations de  $f$  sur  $[-\pi, \pi]$ .

**Exercice 10 : (Intégrales de Wallis - ★★★)** 1) Pour  $n \in \mathbb{N}$ , calculer  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$

- 2) A l'aide d'un changement de variable, montrer que  $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$

**Exercice 11 : ★** On pose  $C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t} dt$  et  $S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sin t + \cos t} dt$

- 1) Par un changement de variable montrer que  $S = C$
- 2) En déduire la valeur de  $S$  et de  $C$ .