TD - Intégrales Corrigé

1BCPST 2 | Feuille d'exercice | Année 2022- 2023

Exercice 1 : *(En 1 minute)* : Calculer les intégrales suivantes :

1) $\int_0^1 x^2 \, dx$ **2)** $\int_{-2}^2 x^{17} \, dx$ **3)** $\int_{-1}^1 \tan x \, dx$ **4)** $\int_0^\pi cos(x) + \sin(x) \, dx$

5) $\int_0^1 5x^5+2x^4-3x^2+6x+1 \, dx$ **6)** $\int_0^1 2^x \, dx$ **7)** $\int_0^n x^n \, dx$ **8)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} \, dx$ **9)** $\int_0^5 |x-2| \, dx$

10) $\int_{-1}^\pi \lfloor x \rfloor \, dx$ **11)** $\int_{-2}^3 \frac{|x|}{x} \, dx$

....

Réponses : **1)** $\int_0^1 x^2 \, dx = \frac{1}{3}$ **2)** $\int_{-2}^2 x^{17} \, dx = 0$ (fonction impaire) **3)** $\int_{-1}^1 \tan x \, dx = 0$ (fonction impaire) **4)** $\int_0^\pi \cos(x)+\sin(x) \, dx = 2$ **5)** $\int_0^1 5x^5+2x^4-3x^2+6x+1 \, dx = \frac{5}{6}+\frac{2}{5}-\frac{3}{3}+\frac{6}{2}+1 = \frac{127}{30}$

6) $\int_0^1 2^x \, dx = \int_0^1 e^{x\ln 2} \, dx = \frac{1}{\ln 2}$ **7)** $\int_0^n x^n \, dx = \frac{n^{n+1}}{n+1}$ **8)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}} \, dx = [2\sqrt{\sin x}]_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$

9) $\int_0^5 |x-2| \, dx = \int_0^2 -x+2 \, dx + \int_2^5 x-2 \, dx = -2+4+\frac{25}{2}-2-6 = \boxed{\frac{13}{2}}$

10) $\int_{-1}^\pi \lfloor x \rfloor \, dx = \int_{-1}^0 -1 \, dx + \int_0^1 0 \, dx + \int_1^2 1 \, dx + \int_2^3 2 \, dx + \int_3^\pi 3 \, dx = -1+0+1+2+3(\pi-3) = \boxed{3\pi-7}$

11) $\int_{-2}^3 \frac{|x|}{x} \, dx = \int_{-2}^0 -1 \, dx + \int_0^3 1 \, dx = \boxed{1}$

Exercice 2 : Calculer les intégrales suivantes : **1)** $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x} \, dx$ **2)** $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} \, dx$ **3)** $\int_{-1}^0 \frac{x}{1+x^2} \, dx$

4) $\int_0^2 (x+1)(x-2)^5 \, dx$ **5)** $\int_0^1 \frac{x+5}{x^2+10x+17} \, dx$ **6)** $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+2}} \, dx$ **7)** $\int_{-1}^1 \frac{|x|}{\sqrt{x+2}}$

8) $\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{\ln x}} \, dx$ **9)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x \, dx$ **10)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\sin(3x) \, dx$ **11)** $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan x} \, dx$

12) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x + \tan^3 x \, dx$ **13)** $\int_0^{2\pi} \max(\cos x, \sin x) \, dx$ **14)** $\int_0^{2\pi} \min(\cos x, \sin x) \, dx$

....

Réponses : **1)** Attention à ne pas oublier les valeurs absolues : $\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x} \, dx = [\ln|x|]_{-2}^{-1} = \boxed{\ln 2}$

2) $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x^2} \, dx = \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{1+x^2} \, dx = \int_0^1 1 \, dx - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \, dx = 1 - [\arctan x]_0^1 = \boxed{1-\frac{\pi}{4}}$

3) $\int_{-1}^0 \frac{x}{1+x^2} \, dx = \left[\frac{1}{2}\ln|1+x^2|\right]_{-1}^0 = \boxed{\frac{\ln 2}{2}}$

4) $\int_0^2 (x+1)(x-2)^5 \, dx = \int_0^2 (x-2+3)(x-2)^5 \, dx = \int_0^2 (x-2)^6 \, dx + \int_0^2 3(x-2)^5 \, dx$

$= \left[\frac{(x-2)^7}{7}\right]_0^2 + 3\cdot\left[\frac{(x-2)^6}{6}\right]_0^2 = \frac{-128}{7} + 3\cdot\frac{64}{6} = \frac{-128}{7}+32 = \boxed{\frac{96}{7}}$

5) $\int_0^1 \frac{x+5}{x^2+10x+17} \, dx = \left[\frac{1}{2}\ln|x^2+10x+17|\right]_0^1 = \frac{\ln 28 - \ln 17}{2} = \boxed{\ln 2 + \frac{\ln 7 - \ln 17}{2}}$

6) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x+2}} \, dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+\sqrt{x+2})(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})} \, dx = \int_0^1 \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}{x+2-x} \, dx$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{x+2} - \sqrt{x}\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\left[\frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1 + \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1\right) = \frac{1}{3}\cdot\left(3^{\frac{3}{2}} - 2^{\frac{3}{2}} + 1^{\frac{3}{2}}\right) = \boxed{\sqrt{3} - \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{3}}$$

7) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{|x|}{\sqrt{x+2}}\ \mathrm{d}x = -\int_{-1}^0 \frac{x}{\sqrt{x+2}}\ \mathrm{d}x + \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+2}}\ \mathrm{d}x$

On va prendre à part cette intégrale : $\displaystyle\int_a^b \frac{x}{\sqrt{x+2}}\ \mathrm{d}x = \int_a^b \frac{x+2-2}{\sqrt{x+2}}\ \mathrm{d}x = \int_a^b \sqrt{x+2}\ \mathrm{d}x + 2\int_a^b \frac{1}{\sqrt{x+2}}\ \mathrm{d}x$

$$= \left[\frac{2}{3}(x+2)^{\frac{3}{2}}\right]_a^b + \left[2(x+2)^{\frac{1}{2}}\right]_a^b = 2\sqrt{b+2}\left(\frac{b+5}{3}\right) - 2\sqrt{a+2}\left(\frac{a+5}{3}\right)$$

Reste à remplacer dans notre cas :

$$\int_{-1}^1 \frac{|x|}{\sqrt{x+2}} = -2\sqrt{2}\cdot\frac{5}{3} + 2\sqrt{1}\cdot\frac{4}{3} + 2\sqrt{3}\cdot 2 - 2\sqrt{2}\cdot\frac{5}{3} = \boxed{4\sqrt{3} + \frac{8-20\sqrt{2}}{3}}$$

8) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x\sqrt{\ln x}}\ \mathrm{d}x = \left[2\sqrt{\ln x}\right]_1^2 = \boxed{2\sqrt{\ln 2}}$

9) On linéarise $\sin^3 x$ (voir TD sur les complexes).

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 x\ \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-1}{4}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin x\ \mathrm{d}x = \frac{1}{12}[\cos 3x]_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{3}{4}[\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{-1}{12} + \frac{3}{4} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

10) Comme la question précédente, il faut linéariser l'expression. On a $\cos(2x)\sin(3x) = \dfrac{1}{2}(\sin 5x - \sin x)$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x)\sin(3x)\ \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 5x - \sin x\ \mathrm{d}x = \frac{-1}{10}\left[\cos 5x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2}\left[\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{10} - \frac{1}{2} = \boxed{\frac{-2}{5}}$$

11) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\tan x}\ \mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos x}{\sin x}\ \mathrm{d}x = \left[\ln|\sin x|\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \ln\frac{\sqrt{3}}{2} - \ln\frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{2}\ln 3}$

12) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x + \tan^3 x\ \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\tan^2 x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \boxed{\frac{1}{2}}$.

13) Avec un cercle trigo, on observe que $\sin x \geq \cos x \iff x \in \left[\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}\right[$ (modulo 2π) donc :

$$\int_0^{2\pi} \max(\cos x, \sin x)\ \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos x\ \mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \sin x\ \mathrm{d}x + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi} \cos x\ \mathrm{d}x = \left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \left[\cos x\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} + \left[\sin x\right]_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} - 0 - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) + 0 + \frac{\sqrt{2}}{2} = \boxed{\sqrt{2}}$$

14) On a $\displaystyle\int_0^{2\pi} \max(\cos x, \sin x) + \min(\cos x, \sin x)\ \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} \cos x + \sin x\ \mathrm{d}x = 0$

Donc $\displaystyle\int_0^{2\pi} \min(\cos x, \sin x)\ \mathrm{d}x = -\int_0^{2\pi} \max(\cos x, \sin x)\ \mathrm{d}x = \boxed{-\sqrt{2}}$

Exercice 3 : *(Calcul de primitive)* Calculer une primitive pour les fonctions suivantes :

1) $f(x) = \ln\dfrac{1}{x}$ **2)** Si $\alpha > 0$, $f(x) = \alpha^x$ **3)** $f(x) = \sin^2(x)$ **4)** $f(x) = xe^x$ **5)** $f(x) = \arctan x$

. . . .

Réponses : **1)** On a $f(x) = -\ln x$ donc une primitive est $\boxed{F(x) = -x\ln x + x}$

2) On a $f(x) = e^{x\ln\alpha}$ donc une primitive est $F(x) = \dfrac{1}{\ln\alpha}e^{x\ln\alpha}$. Soit $\boxed{F(x) = \dfrac{\alpha^x}{\ln\alpha}}$

3) On sait que $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ donc $\sin^2 x = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2x)$. On en déduit une primitive :

$\boxed{F(x) = \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{4}\sin 2x}$

4) On calcule $\displaystyle F(x) = \int_0^x te^t\ \mathrm{d}t = \left[te^t\right]_0^x - \int_0^x e^t\ \mathrm{d}t = xe^x - \left[e^t\right]_0^x = xe^x - e^x + 1.$

A une constante près, on peut donc choisir une primitive $\boxed{F(x) = (x-1)e^x}$.

5) $F(x) = \int_0^x \arctan t \ \mathrm{d}t = \Big[\ t \arctan t \ \Big]_0^x - \int_0^x \frac{t}{1+t^2} \ \mathrm{d}t = x \arctan x - \Big[\ \frac{1}{2} \ln(1+t^2) \ \Big]_0^x = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)$ On a donc une primitive $\boxed{F(x) = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln(1+x^2)}$

Exercice 4 : *(IPP)* Calculer les intégrales suivantes :

1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos t \ \mathrm{d}t$ **2)** $\int_0^1 t^2 e^t \ \mathrm{d}t$ **3)** $\int_1^2 \frac{\ln t}{t} \ \mathrm{d}t$ **4)** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t}{\cos^2 t} \ \mathrm{d}t$

. . . .

Réponses : **1)** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos t \ \mathrm{d}t = \Big[\ t \sin t \ \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \ \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2} + \Big[\ \cos t \ \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{\frac{\pi}{2} + 1}$

2) $\int_0^1 t^2 e^t \ \mathrm{d}t = \Big[\ t^2 e^t \ \Big]_0^1 - \int_0^1 2te^t \ \mathrm{d}t = e - 2\left(\Big[\ te^t \ \Big]_0^1 - \int_0^1 e^t \ \mathrm{d}t \right) = e - 2\left(e - \Big[\ e^t \ \Big]_0^1 \right) = \boxed{e-2}$

3) Ce n'est pas une IPP.... $\int_1^2 \frac{\ln t}{t} \ \mathrm{d}t = \Big[\ \frac{1}{2}(\ln t)^2 \ \Big]_1^2 = \boxed{\frac{(\ln 2)^2}{2}}$

4) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{t}{\cos^2 t} \ \mathrm{d}t = \Big[\ t \tan t \ \Big]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan t \ \mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} - \Big[\ -\ln|\cos t| \ \Big]_0^{\frac{\pi}{4}} = \boxed{\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2}$

Exercice 5 : *(Avec des fractions)* Calculer les intégrales suivantes :

1) $\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)} \ \mathrm{d}x$ **2)** $\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2-3x+2} \ \mathrm{d}x$ **3)** $\int_1^2 \frac{1}{x(x-1)^2} \ \mathrm{d}x$ **4)** $\int_1^2 \frac{1}{(x^2+1)x} \ \mathrm{d}x$

5) $\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2+2x+2} \ \mathrm{d}x$

. . . .

Réponses : **1)** On a $\frac{1}{x(x+1)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}$ donc $\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)} \ \mathrm{d}x = \Big[\ \ln x \ \Big]_1^2 - \Big[\ \ln(x+1) \ \Big]_1^2 = \boxed{2\ln 2 - \ln 3}$

2) On a $\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$.

Donc $\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2-3x+2} \ \mathrm{d}x = \Big[\ \ln|x-2| \ \Big]_{-1}^0 - \Big[\ \ln|x-1| \ \Big]_{-1}^0 = \boxed{2\ln 2 - \ln 3}$

3) $\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{1}{x-1} \cdot \frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{x-1}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x} \right) = \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x(x-1)} = \frac{1}{(x-1)^2} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x}$

Donc :

$\int_2^3 \frac{1}{x(x-1)^2} \ \mathrm{d}x = \Big[\ \frac{1}{x-1} \ \Big]_2^3 - \Big[\ \ln(x-1) \ \Big]_2^3 + \Big[\ \ln x \ \Big]_2^3 = \boxed{\frac{-1}{2} - 2\ln 2 + \ln 3}$

4) On a $\frac{1}{(x^2+1)x} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$ donc :

$\int_1^2 \frac{1}{(x^2+1)x} \ \mathrm{d}x = \Big[\ \ln x \ \Big]_1^2 - \Big[\ \frac{1}{2} \ln(1+x^2) \ \Big]_1^2 = \boxed{\frac{3}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 5}$

5) On a $x^2+2x+2 = (x+1)^2+1$ donc

$\int_{-1}^0 \frac{1}{x^2+2x+2} \ \mathrm{d}x = \int_{-1}^0 \frac{1}{(x+1)^2+1} \ \mathrm{d}x = \Big[\ \arctan(x+1) \ \Big]_{-1}^0 = \arctan(1) - \arctan(0) = \boxed{\frac{\pi}{4}}$

Exercice 6 : *(Changement de variable)* Calculer les intégrales suivantes :

1) $\int_e^x \frac{\ln(\ln t)}{t} \ \mathrm{d}t$ **2)** $\int_0^x e^{2t} \cos(e^t) \ \mathrm{d}t$ **3)** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^4 x \ \mathrm{d}x$ **4)** $\int_e^x \frac{\ln t \ \mathrm{d}t}{t + t(\ln t)^2}$ **5)** $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\sin x} \ \mathrm{d}x$

. . . .

Réponses : **1)** $\displaystyle\int_e^x \frac{\ln(\ln t)}{t}\ \mathrm{d}t$. On pose $u = \ln t$ ainsi $\ \mathrm{d}t = e^u\ \mathrm{d}u$

et $\displaystyle\int_e^x \frac{\ln(\ln t)}{t}\ \mathrm{d}t = \int_1^{\ln x} \frac{\ln u}{e^u} e^u\ \mathrm{d}u = \int_1^{\ln x} \ln u\ \mathrm{d}u = \Big[\ u\ln u - u\ \Big]t_1^{\ln x} = \boxed{\ln x(\ln(\ln x) - 1) + 1}$.

2) $\displaystyle\int_0^x e^{2t}\cos(e^t)\ \mathrm{d}t$. On pose $u = e^t$ ainsi $\ \mathrm{d}t = \frac{1}{u}\ \mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_0^x e^{2t}\cos(e^t)\ \mathrm{d}t = \int_1^{e^x} u^2\cos u \frac{\mathrm{d}u}{u} = \int_1^{e^x} u\cos u\ \mathrm{d}u =$
$\displaystyle\Big[\ u\sin u\ \Big]_1^{e^x} - \int_1^{e^x} \sin u\ \mathrm{d}u = e^x\sin e^x - \sin 1 + \Big[\ \cos u\ \Big]_1^{e^x} = \boxed{e^x\sin e^x + \cos e^x - \sin 1 - \cos 1}$

3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^4 x\ \mathrm{d}x$. On pose $u = \tan x$ et ainsi $\ \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$

$\displaystyle\int_0^1 \frac{u^4}{1+u^2}\ \mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{u^4-1}{1+u^2}\ \mathrm{d}u + \int_0^1 \frac{1}{1+u^2}\ \mathrm{d}u = \int_0^1 \frac{(u^2-1)(u^2+1)}{1+u^2}\ \mathrm{d}u + \Big[\ \arctan u\ \Big]_0^1$

$\displaystyle= \int_0^1 u^2 - 1\ \mathrm{d}u + \frac{\pi}{4} = \frac{1}{3} - 1 + \frac{\pi}{4} = \boxed{\frac{-2}{3} + \frac{\pi}{4}}$

4) $\displaystyle\int_e^x \frac{\ln t\ dt}{t + t(\ln t)^2}$ On pose $u = \ln t$ et ainsi $\ \mathrm{d}t = e^u\ \mathrm{d}u$ On a :

$\displaystyle\int_e^x \frac{\ln t\ dt}{t + t(\ln t)^2} = \int_1^{\ln x} \frac{ue^u\ \mathrm{d}u}{e^u + e^u u^2} = \int_1^{\ln x} \frac{u\ \mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{1}{2}\Big[\ \ln|1+u^2|\ \Big]_1^{\ln x} = \boxed{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\ln^2 x}{2}\right)}$

5) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\sin x}\ \mathrm{d}x$ On pose $u = \sin x$ et ainsi $\ \mathrm{d}x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\ \mathrm{d}u$

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1+\sin x}\ \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \sqrt{\frac{1+u}{1-u^2}}\ \mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-u}}\ \mathrm{d}u = \Big[\ -2\sqrt{1-u}\ \Big]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} = -2\sqrt{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}} + 2$

$= \boxed{2 - \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}}$

<u>Exercice 7</u> : Calculer les intégrales suivantes : Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)e^{\alpha x}\ \mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)e^{\alpha x}\ \mathrm{d}x$.

....

Réponses : On note $\displaystyle C = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)e^{\alpha x}\ \mathrm{d}x$ et $\displaystyle S = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)e^{\alpha x}\ \mathrm{d}x$

On a $\displaystyle C + iS = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ix}e^{\alpha}x\ \mathrm{d}x = \int_0^1 e^{(i+\alpha)x}\ \mathrm{d}x = \left[\ \frac{e^{(i+\alpha)x}}{i+\alpha}\ \right]_0^1 = \frac{e^{(i+\alpha)\frac{\pi}{2}} - 1}{i+\alpha} = \frac{(-1+ie^{\frac{\alpha\pi}{2}})(\alpha - i)}{\alpha^2 - 1} =$
$\displaystyle\frac{\alpha + e^{\frac{\alpha\pi}{2}} - i(\alpha e^{\frac{\alpha\pi}{2}} + 1)}{\alpha^2+1}$

En identifiant la partie réelle et imaginaire : $\boxed{\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)e^{\alpha x}\ \mathrm{d}x = \frac{\alpha + e^{\frac{\alpha\pi}{2}}}{\alpha^2+1} \text{ et } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)e^{\alpha x}\ \mathrm{d}x = -\frac{\alpha e^{\frac{\alpha\pi}{2}} + 1}{\alpha^2+1}}$

<u>Exercice 8</u> : *(Integrales et sommes)* Calculer les intégrales suivantes :

1) $\displaystyle\int_0^1 \sum_{i=1}^n (i+1)x^i\ \mathrm{d}x$ **2)** $\displaystyle\sum_{i=1}^n \int_0^1 \frac{1}{x+i}\ \mathrm{d}x$ **3)** $\displaystyle\int_0^n \sum_{i=1}^n |x-i|\ \mathrm{d}x$

4) Avec un calcul d'intégrales, montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\sum_{i=0}^n \binom{n}{k} \frac{x^{k+1}}{k+1} = \frac{(1+x)^{n+1} - 1}{n+1}$.

....

Réponses : **1)** $\displaystyle\int_0^1 \sum_{i=1}^n (i+1)x^i\ \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n \int_0^1 (i+1)x^i\ \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n \Big[\ x^{i+1}\ \Big]_0^1 = \sum_{i=1}^n 1 = \boxed{n}$

2) $\displaystyle\sum_{i=1}^n \int_0^1 \frac{1}{x+i}\ \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n \Big[\ \ln(x+i)\ \Big]_0^1 = \sum_{i=1}^n \ln(i+1) - \ln i = \boxed{\ln(n+1)}$

3) $\displaystyle\int_0^n \sum_{i=1}^n |x-i| \ \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n \int_0^n |x-i| \ \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n \int_0^i i - x \ \mathrm{d}x + \int_i^n x - i \ \mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n i^2 - \frac{i^2}{2} + \frac{n^2}{2} - \frac{i^2}{2} - (n-i)i$

$\displaystyle = \sum_{i=1}^n i^2 - ni + \frac{n^2}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - n\frac{n(n+1)}{2} + \frac{n^3}{2} = \boxed{\frac{n(2n^2+1)}{6}}$

4) On part du binôme de Newton : $(1+t)^n = \displaystyle\sum_{i=0}^n \binom{n}{k} t^k$ et on intègre les deux membres entre 0 et x. On a

$\displaystyle\int_0^x (1+t)^n \ \mathrm{d}t = \left[\frac{(1+t)^{n+1}}{n+1} \right]_0^x = \boxed{\frac{(1+x)^{n+1}-1}{n+1}.}$ D'autre part :

$\displaystyle\int_0^x \sum_{i=0}^n \binom{n}{k} t^k \ \mathrm{d}t = \sum_{i=0}^n \int_0^x \binom{n}{k} t^k \ \mathrm{d}t = \sum_{i=0}^n \binom{n}{k} \left[\frac{t^{k+1}}{k+1} \right]_0^x = \boxed{\sum_{i=0}^n \binom{n}{k} \frac{x^{k+1}}{k+1}}.$

<u>Exercice 9</u> : On pose $C = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t + \cos t} \ \mathrm{d}t$ et $S = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sin t + \cos t} \ \mathrm{d}t$

1) Par un changement de variable montrer que $S = C$

2) En déduire la valeur de S et de C.

....

Réponses :

1) On pose $u = \dfrac{\pi}{2} - t$. On a alors $C = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{2}}^0 \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right)} (-\ \mathrm{d}u) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin u}{\sin u + \cos u} \ \mathrm{d}u = S$

2) On remarque que $C + S = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t + \sin t}{\sin t + \cos t} \ \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \ \mathrm{d}t = \frac{\pi}{2}$

Comme $S = C$ on a donc $S + C = 2C = \dfrac{\pi}{2}$. On en déduit $\boxed{C = S = \dfrac{\pi}{4}}$

<u>Exercice 10</u> : On pose $f(x) = \displaystyle\int_0^x t - \lfloor t \rfloor dt$

1) Dresser le tableau de variation de f.

2) Calculer $f(x)$ sur $[0,1]$

3) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, Calculer la valeur de $f(x+1) - f(x)$.

4) En déduire grossièrement le graphe de f.

....

Réponses :

1) On a f dérivable sur $\mathbb{R}$ avec $f'(x) = x - \lfloor x \rfloor \geq 0$. Donc f est strictement croissante.

x	$-\infty$ $\quad\quad\quad$ $+\infty$
$f(x)$	$\nearrow$

2) On si $x \in [0,1]$ et $t \in [0, x[$ alors $\lfloor t \rfloor = 0$ donc $f(x) = \displaystyle\int_0^x t \ \mathrm{d}t = \boxed{\frac{x^2}{2}}$ si $x \in [0,1]$.

3) On a $f(x+1) - f(x) = \displaystyle\int_0^{x+1} t - \lfloor t \rfloor \ \mathrm{d}t - \int_0^x t - \lfloor t \rfloor \ \mathrm{d}t = \int_x^{x+1} t - \lfloor t \rfloor \ \mathrm{d}t.$

En posant $u = t - x$ on a :

$\displaystyle\int_x^{x+1} t - \lfloor t \rfloor \ \mathrm{d}t = \int_0^1 u + x - \lfloor u + x \rfloor \ \mathrm{d}u = \int_0^1 u \ \mathrm{d}u + x + \int_0^1 \lfloor u + x \rfloor \ \mathrm{d}u = \frac{1}{2} + x + \int_0^1 \lfloor u + x \rfloor \ \mathrm{d}u$

Comme $u \in [0,1]$, on a $\lfloor x + u \rfloor = \lfloor x \rfloor \iff x + u < \lfloor x \rfloor + 1 \iff u < \lfloor x \rfloor + 1 - x$

et $\lfloor x + u \rfloor = \lfloor x \rfloor + 1 \iff u \geq \lfloor x \rfloor + 1 - x$. On a donc :

$$\int_0^1 \lfloor u+x\rfloor \text{ du} = \int_0^{\lfloor x\rfloor+1-x} \lfloor x\rfloor \text{ du}+\int_{\lfloor x\rfloor+1-x}^1 \lfloor x\rfloor+1 \text{ du} = \int_0^1 \lfloor x\rfloor \text{ du}+\int_{\lfloor x\rfloor+1-x}^1 1 \text{ du} = \lfloor x\rfloor+(1-\lfloor x\rfloor-1+x) = x$$

Finalement on a donc $\boxed{f(x+1)-f(x) = 2x+\frac{1}{2}}$

4)

<u>Exercice 11</u> : On pose $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\sin t}{t} dt$

1) Quel est son domaine de définition, son domaine dé dérivabilité ? Calculer f'.
2) Etudier la parité de f.
3) Dresser le tableau de variations de f sur $[-\pi,\pi]$.

....

Réponses :

1) $x \to \dfrac{\sin x}{x}$ est définie sur $[x,2x]$ pour tout $x \neq 0$ donc f est clairement définie sur $\mathbb{R}^*$. Il semble cependant que f ne soit pas définie en 0, même si on pourrait imaginer assez facilement avoir $f(0) = 0$ car c'est une intégrale vide (f est en fait prolongrable par continuité en 0.) On retient donc $\boxed{D_f = \mathbb{R}^*}$.

$f(x) = \displaystyle\int_1^{2x} \frac{\sin t}{t} \text{ dt} + \int_x^1 \frac{\sin t}{t} \text{ dt}$. Si $F(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{\sin t}{t} \text{ dt}$ alors F est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et $F'(x) = \dfrac{\sin x}{x}$.

Or $f(x) = F(2x)-F(x)$ Donc $\boxed{f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}^*}$ et

$f'(x) = 2F'(2x)-F'(x) = 2\dfrac{\sin 2x}{2x} - \dfrac{\sin x}{x} = \boxed{\dfrac{(2\cos x-1)\sin x}{x}}$.

2) $f(-x) = \displaystyle\int_{-x}^{-2x} \frac{\sin t}{t} \text{ dt} = \underbrace{\int_x^{2x} \frac{\sin(-u)}{-u}(-\text{ du})}_{\text{On pose } u=-t} = -\int_x^{2x} \frac{\sin u}{u} \text{ du} = -f(x)$ Donc $\boxed{f \text{ est impaire.}}$

3) Comme f est impaire, on ne l'étudie que sur $]0,\pi]$. On a :
$f'(x) \geq 0 \iff 2\cos x-1 \geq 0 \iff \cos x \geq \dfrac{1}{2} \iff x \in \left]0, \dfrac{\pi}{3}\right]$ On en déduit les variations de f :

x	0		$\frac{\pi}{3}$		π
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	‖ 0	$\nearrow$		$\searrow$	

<u>Exercice 12</u> : *(Intégrales de Wallis)* **1)** Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \text{ dt}$

2) A l'aide d'un changement de variable, montrer que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \text{ dt} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \text{ dt}$

....

Réponses : Attention, l'exercice est compliqué.

1) On pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \text{ dt} = \Big[-\cos t \sin^{n-1} t \Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \sin^{n-2} t \text{ dt} = 0+(n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-$ $\sin^2 t)\sin^{n-2} t \text{ dt} = (n-1)\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} t \text{ dt} - (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t \text{ dt} = (n-1)(I_{n-2}-I_n)$

On en déduit $nI_n = (n-1)I_{n-2} \iff I_n = \dfrac{n-1}{n} I_{n-2}$. On peut donc distinguer les cas pairs et impairs :

Pour n pair : $I_{2p} = \dfrac{2p-1}{2p} I_{2p-2} = \dfrac{(2p-1)(2p-3)}{2p(2p-2)} I_{2p-4} = \dfrac{(2p-1)(2p-3)\times\ldots\times 3\times 1}{2p(2p-2)\times\ldots\times 2} I_0 = \dfrac{(2p-1)!}{2^{2p}(p!)^2}\dfrac{\pi}{2}$

et n impair : $I_{2p+1} = \dfrac{2p}{2p+1} I_{2p-1} = \dfrac{2p(2p-2)}{(2p+1)(2p-1)} I_{2p-3} = \ldots = \dfrac{2p(2p-2)\times\ldots\times 2}{(2p+1)(2p-1)\times\ldots\times 3} I_1 = \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}$

car $I_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \,\mathrm{d}t = \Big[-\cos t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$. On a donc en conclusion : $\boxed{I_{2p} = \dfrac{(2p-1)!\pi}{2^{2p+1}(p!)^2} \text{ et } I_{2p+1} = \dfrac{2^{2p}(p!)^2}{(2p+1)!}}$

2) On pose $u = \dfrac{\pi}{2} - t$. On a alors $\mathrm{d}t = -\,\mathrm{d}u$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \,\mathrm{d}t = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^n\left(\frac{\pi}{2} - u\right)(-\,\mathrm{d}u) \boxed{= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n u \,\mathrm{d}u}$.