

TD 6 - Complexes \mathbb{C}

BCPST 1

Feuille d'exercice

Année 2023- 2024

Forme algébrique

Exercice 1 : ♡ Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

- 1) $(1+i)(1+2i)$ 2) $(1+i)^2$ 3) $\frac{1}{1+i}$ 4) $\frac{i}{3+2i}$ 5) $\overline{1+3i}$ 6) $1+5i+\overline{2+6i}$
 7) $\overline{(1+3i)}(2+2i)$ 8) $e^{i\frac{\pi}{4}}$ 9) $e^{i\frac{-5\pi}{6}}$ 10) $2e^{i\frac{11\pi}{3}}$ 11) $ie^{1+i\frac{\pi}{3}}$ 12) $e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{i\frac{-\pi}{4}}$

Exercice 2 : (*Géométrie*) ★ Placer sur un graphe les nombres complexes suivants :

- 1) $1+i$ 2) $5i$ 3) -4 4) $3-5i$ 5) $\overline{3-5i}$ 6) $2e^{i\frac{\pi}{3}}$ 7) $e^{i\frac{3\pi}{4}}$ 8) $e^{i\frac{-3\pi}{4}}+e^{i\frac{-5\pi}{6}}$

Conjugué, Module

Exercice 3 : ♡ Calculer les modules des nombres complexes suivants :

- 1) $2i$ 2) -4 3) $\frac{-126i}{5}$ 4) 5 5) $1+i$ 6) $4+4i$ 7) $5e^{i\frac{\pi}{4}}$ 8) $e^{i\frac{\pi}{7}} \cdot e^{i\frac{\pi}{11}}$
 9) $i\overline{(1-4i)}$ 10) $\frac{i}{3+4i}$ 11) $\frac{1+i}{1-i}$ 12) $(1+i)^2$ 13) $(9+12i)^3$ 14) $\frac{(2+i)ie^{i\frac{\pi}{5}}}{1-2i}$
 15) $e^{5+i\frac{\pi}{2}}$

Exercice 4 : ★★ Dessiner sur un graphique l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ qui vérifient les propriétés suivantes :

- 1) $|z| = |z-2-3i|$ 2) $|z+i| = 2$ 3) $|\overline{z}+i| = 2$ 4) $|z^2| = |z|$.

Exercice 5 : (*Réel ou Imaginaire ?*) ★ Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Pour tout z_1, z_2 , Les nombres suivants sont ils réels ou imaginaires purs ou ni l'un ni l'autre ?

- 1) $z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2$ 2) $z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2$ 3) $z_1\overline{z_1} - z_2\overline{z_2}$ 4) $z_1z_2 - \overline{z_1}\overline{z_2}$ 5) $z_1 \cdot \overline{z_2} \cdot \overline{z_1} \cdot z_1$
 6) $i|z_1+z_2|$ 7) $(z_1+z_2)(z_1-z_2)$ 8) $(z_1+\overline{z_2})(\overline{z_1}-z_2)$ 9) $(z_1-\overline{z_2})(\overline{z_1}-z_2)$
 10) $e^{z_1}e^{z_2} + e^{\overline{z_1}}e^{\overline{z_2}}$

Exercice 6 : (*Inégalité triangulaire*) ★★ 1) Rappeler l'énoncé de l'inégalité triangulaire.

- 2) Montrer que $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}, ||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$
 3) Montrer que $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \mid z_1 = \lambda z_2$

Exercice 7 : (*Identité du parallélogramme*) ★ Montrer que $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} \quad |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$. Interpréter géométriquement ces conditions.

Forme trigonométrique / exponentielle

Exercice 8 : ♡ Mettre sous forme trigonométrique, puis sous forme exponentielle les nombres suivants :

- 1) 1 2) $\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ 3) $-1 - \sqrt{3}i$ 4) $\sqrt{3} - \sqrt{3}i$ 5) $-5i$ 6) -32
 7) $\cos(1) - i \sin(1)$ 8) $\frac{1}{\cos(1) + i \sin(1)}$ 9) $\frac{2}{\sqrt{3} + 3i}$ 10) $(1+i)^2$ 11) $(1+i)^3$
 12) $e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$ 13) $ie^{1+i\frac{\pi}{3}}$ 14) $-e^{\ln 2 + i\frac{\pi}{7}}$ 15) $e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{-\pi}{3}}$

Exercice 9 : ★★ Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, sous forme trigonométrique $z_1 = r_1(\cos(\theta_1) + i \sin(\theta_1))$ et $z_2 = r_2(\cos(\theta_2) + i \sin(\theta_2))$. Ecrire sous forme trigonométrique les nombres suivants :

- 1) $z_1 \cdot z_2$ 2) $\frac{z_1}{z_2}$ 3) e^{z_1} 4) $e^{z_1+z_2}$.

Exercice 10 : ★★ - ★★★ On pose $z = re^{i\theta}$ et $E = \{|z + e^{i\varphi}| \mid \varphi \in \mathbb{R}\}$

- 1) Justifier que E est borné. 2) Calculer ses bornes supérieure et inférieure.

Exercice 11 : (linéarisation) ★ Linéariser les formes suivantes :

- 1) $\sin^3 x$ 2) $\cos^5 x$ 3) $\cos^3 x \cdot \sin x$ 4) $\cos^2 x \cdot \sin^2 x$. 5) $\cos x \cdot \sin^4 x$.

Exercice 12 : (Formules de Simpson) ★★ Pour $p, q \in \mathbb{R}$, montrer les égalités suivantes :

- 1) $\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$ 2) $\cos p - \cos q = -2 \sin \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$
 3) $\sin p + \sin q = 2 \sin \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}$ 4) $\sin p - \sin q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \sin \frac{p-q}{2}$

Résolution d'équations d'ordre 2

Exercice 13 : ♡ Trouver les racines des polynômes suivant, puis les factoriser :

- 1) $x^2 + 2x + 1$ 2) $2x^2 - 6x + 4$ 3) $-3x^2 + 45x - 150$ 4) $x^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}x + 1$ 5) $2x^2 + 2x + 2$
 6) $(x+1)^2 + x$ 7) $x^2 - 1$ 8) $x^2 + 1$ 9) $5x^2$ 10) $x^2 - 2x$ 11) $x^2 - 2x + 2$

Exercice 14 : ♡ Calculer les racines carrées des nombres complexes suivants :

- 1) -2 2) i 3) $-i$ 4) $4 - 3i$ 5) $\cos(1) + i \sin(1)$ 6) e^{1+2i}

Exercice 15 : (Racines carrées plus compliquées) ★ - ★★★ Calculer les racines carrées des nombres complexes suivants : 1) $5 + 12i$ 2) $-32 + 24i$ 3) $-15 - 8i$ 4) $21 - 20i$ 5) $48 + 14i$
 6) $1 + 2i$

Exercice 16 : (Problème) ★★ Soit $Z = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$

- 1) Calculer sous forme algébrique les racines carrées complexes de Z .
 2) Calculer ces racines carrées sous forme trigonométrique cette fois.
 3) En déduire une expression de $\cos \frac{\pi}{8}$ et $\sin \frac{\pi}{8}$.
 4) Proposer une méthode pour calculer $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$, puis les calculer.

Exercice 17 : (Complexes et sommes ★★ - ★★★) Calculer les sommes suivantes en fonction de n :

- 1) $\sum_{k=0}^n \cos k$ 2) $\sum_{k=0}^n \sin k$ 3) $\sum_{k=0}^{2n} \binom{4n}{2k} (-1)^k$ 4) $\sum_{k=0}^{2n-1} \binom{4n}{2k+1} (-1)^k$

Exercice 18 : (Complexes et intégrales ★★) Calculer les intégrales suivantes :

- 1) Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)e^{\alpha x} dx$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)e^{\alpha x} dx$. 2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x dx$ 3) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x dx$

Résolution d'équations trigonométriques

Exercice 19 : (Application directe) ★ - ★★★ Résoudre les équations suivantes d'inconnue θ :

- 1) $\cos \theta + \sin \theta = 1$ 2) $3 \cos \theta - \sqrt{3} \sin \theta = \sqrt{6}$ 3) $\cos \theta - 2 \sin \theta = 4$ 4) $\cos \theta - \sin \theta = \frac{1}{2}$

Exercice 20 : ★★★ Résoudre $\sin^2 \theta + \frac{1}{2} \sin(2\theta) = 1$

Exercice 21 : ★ - ★★★ Soit $E = \{3 \cos \theta - 4 \sin \theta \mid \theta \in \mathbb{R}\}$

- 1) Montrer que E est borné. 2) Calculer $\sup E$ et $\inf E$.