TD - Complexes $\mathbb{C}$

BCPST 1 — Feuille d'exercice — Année 2022- 2023

Forme algébrique

Exercice 1 : *(En 1 minute)* Mettre sous forme algébrique les nombres complexes suivants :

1) $(1+i)(1+2i)$ **2)** $(1+i)^2$ **3)** $\dfrac{1}{1+i}$ **4)** $\dfrac{i}{3+2i}$ **5)** $\overline{1+3i}$ **6)** $1+5i+\overline{2+6i}$
7) $\overline{(1+3i)}(2+2i)$ **8)** $e^{i\frac{\pi}{4}}$ **9)** $e^{i\frac{-5\pi}{6}}$ **10)** $2e^{i\frac{11\pi}{3}}$ **11)** $ie^{1+i\frac{\pi}{3}}$ **12)** $e^{i\frac{\pi}{3}}+e^{i\frac{-\pi}{4}}$

. . . .

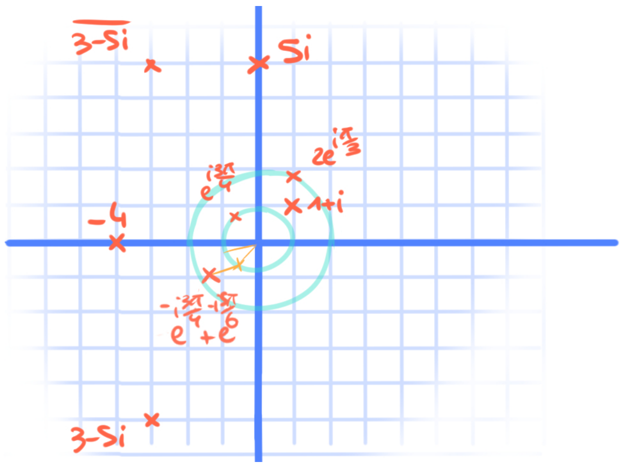
Réponses : **1)** $-1+3i$ **2)** $2i$ **3)** $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i$ **4)** $\dfrac{2}{13}+\dfrac{3}{13}i$ **5)** $1-3i$ **6)** $3-i$ **7)** $8-4i$
8) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ **9)** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{1}{2}i$ **10)** $1-\sqrt{3}i$ **11)** $\dfrac{-e\sqrt{3}}{2}+\dfrac{e}{2}i$ **12)** $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}i$

Exercice 2 : *(Géométrie)* Placer sur un graphe les nombres complexes suivants :

1) $1+i$ **2)** $5i$ **3)** -4 **4)** $3-5i$ **5)** $\overline{3-5i}$ **6)** $2e^{i\frac{\pi}{3}}$ **7)** $e^{i\frac{3\pi}{4}}$ **8)** $e^{i\frac{\pi}{4}}+e^{i\frac{\pi}{6}}$

. . . .

Réponses :



Conjugué, Module

Exercice 3 : *(En 1 minute)* Calculer les modules des nombres complexes suivants :

1) $2i$ **2)** -4 **3)** $\dfrac{-126i}{5}$ **4)** $1+i$ **5)** $4+4i$ **6)** $5e^{i\frac{\pi}{4}}$ **7)** $e^{i\frac{\pi}{7}}\cdot e^{i\frac{\pi}{11}}$ **8)** $i(\overline{1-4i})$
9) $\dfrac{i}{3+4i}$ **10)** $\dfrac{1+i}{1-i}$ **11)** $(1+i)^2$ **12)** $(9+12i)^3$ **13)** $\dfrac{(2+i)ie^{i\frac{\pi}{9}}}{1-2i}$ **14)** $e^{5+i\frac{\pi}{2}}$

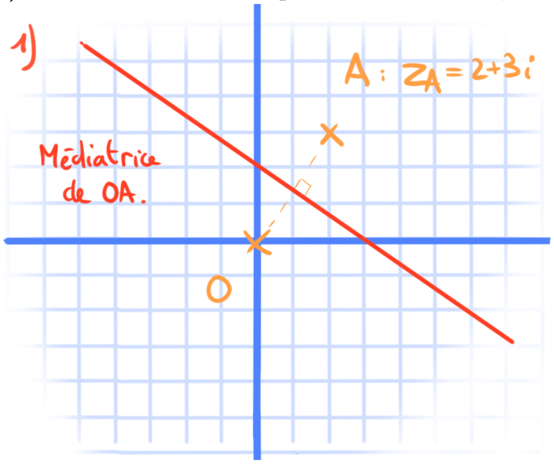
. . . .

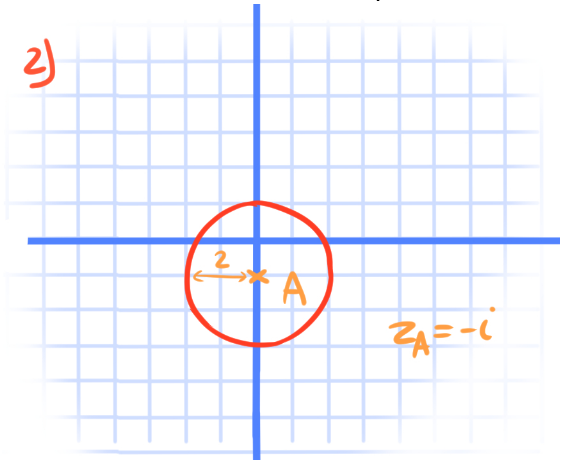
Réponses : **1)** $|2i|=2$ **2)** $|-4|=4$ **3)** $|\dfrac{-126i}{5}|=\dfrac{126}{5}$ **4)** $|1+i|=\sqrt{2}$ **5)** $|4+4i|=4\sqrt{2}$
6) $|5e^{i\frac{\pi}{4}}|=5$ **7)** $|e^{i\frac{\pi}{7}}\cdot e^{i\frac{\pi}{11}}|=1$ **8)** $|i(\overline{1-4i})|=\sqrt{17}$ **9)** $|\dfrac{i}{3+4i}|=\dfrac{1}{5}$ **10)** $|\dfrac{1+i}{1-i}|=1$
11) $|(1+i)^2|=2$ **12)** $|(9+12i)^3|=15^3=3375$ **13)** $|\dfrac{(2+i)ie^{i\frac{\pi}{9}}}{1-2i}|=1$ **14)** $|e^{5+i\frac{\pi}{2}}|=e^5$

Exercice 4 : Dessiner sur un graphique l'ensemble des $z\in\mathbb{C}$ qui vérifient les propriétés suivantes :
1) $|z|=|z-2-3i|$ **2)** $|z+i|=2$ **3)** $|\overline{z}+i|=2$ **4)** $|z^2|=|z|$.

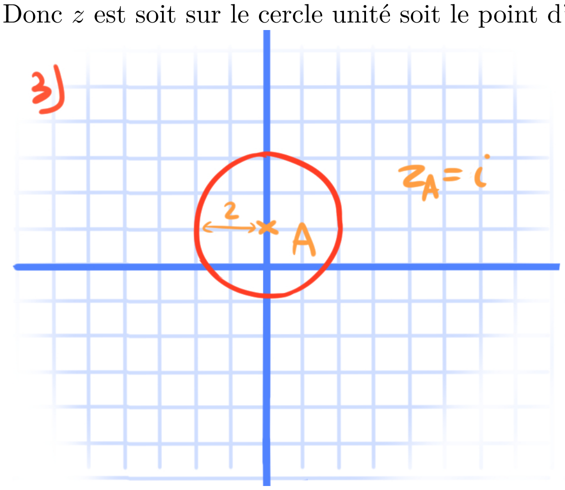
....

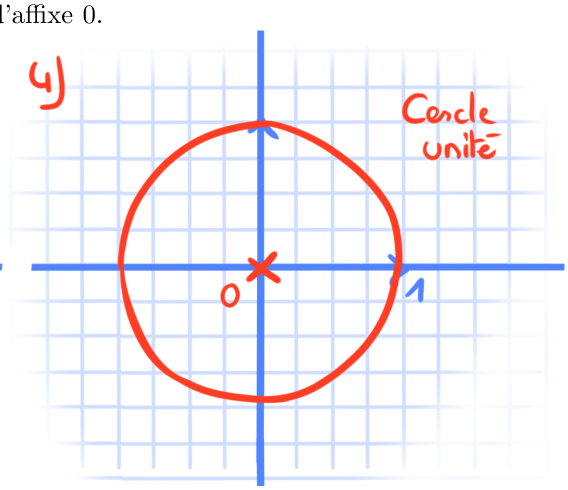
Réponses : **1)** z doit être à même distance de 0 que de A d'affixe $2+3i$. Il est donc sur la médiatrice du segment OA.
2) z est à distance 2 du point A d'affixe $-i$, donc sur le cercle de centre A de rayon 2.





3) $|\overline{z}+i| = |z-i|$ donc c'est la même chose que la question précédente, avec seulement l'affixe du point A qui est égale à i cette fois.
4) $|z^2| = |z| \iff |z|^2 = |z| \iff |z| = 1$ ou $|z| = 0$.
Donc z est soit sur le cercle unité soit le point d'affixe 0.





Exercice 5 : *(Réel ou Imaginaire ?)* Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Pour tout z_1, z_2, Les nombres suivants sont ils réels ou imaginaires purs ou ni l'un ni l'autre ?
1) $z_1\overline{z_2} + \overline{z_1}z_2$ **2)** $z_1\overline{z_2} - \overline{z_1}z_2$ **3)** $z_1\overline{z_1} - z_2\overline{z_2}$ **4)** $z_1z_2 - \overline{z_1z_2}$ **5)** $z_1 \cdot \overline{z_2} \cdot \overline{z_1} \cdot z_1$
6) $i|z_1+z_2|$ **7)** $(z_1+z_2)(z_1-z_2)$ **8)** $(z_1+\overline{z_2})(\overline{z_1}-z_2)$ **9)** $(z_1-\overline{z_2})(\overline{z_1}-z_2)$
10) $e^{z_1}e^{z_2} + e^{\overline{z_1}}e^{\overline{z_2}}$

....

Réponses : **1)** Réel **2)** Imaginaire **3)** Réel **4)** Imaginaire **5)** Reel
6) Imaginaire
7) Aucun des deux par exemple si $z_2 = 0$ et $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}$ on a $(z_1+z_2)(z_1-z_2) = z_1^2 = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ ni réel ni imaginaire.
8) Aucun des deux. Par exemple si $z_1 = 1$ et $z_2 = 2i$ alors $(z_1+\overline{z_2})(\overline{z_1}-z_2) = (1-2i)^2 = -3+4i$ ni reel, ni imaginaire **9)** Réel **10)** Réel

---

Exercice 6 : *(Inégalité triangulaire)* **1)** Rappeler l'énoncé de l'inégalité triangulaire.
2) Montrer que $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$
3) On suppose que $z_2 \neq 0$. Montrer que $|z_1+z_2| = |z_1| + |z_2| \iff \exists \lambda \in \mathbb{R} \mid z_1 = \lambda z_2$

. . . .

Réponses : **1)** $\forall x, y \in \mathbb{C}$, $|x+y| \leq |x| + |y|$
2) On utilise l'inégalité triangulaire : si $x, y \in \mathbb{C}$ alors $|x+y| \leq |x| + |y|$. On pose $x = z_1 - z_2$ et $y = z_2$, on obtient alors $|x+y| \leq |x| + |y| \iff |z_1 - z_2 + z_2| \leq |z_1 - z_2| + |z_2| \iff |z_1| \leq |z_1 - z_2| + |z_2|$ $\iff |z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2| \quad (*)$. Par ailleurs, en intervertissant les rôles de z_1 et de z_2 dans le raisonnement précédent, on obtient aussi l'inégalité $|z_2| - |z_1| \leq |z_2 - z_1|$ que l'on peut réécrire ainsi :
$|z_2| - |z_1| \leq |z_2 - z_1| \iff -(|z_1| - |z_2|) \leq |z_1 - z_2| \iff |z_1| - |z_2| \geq -|z_1 - z_2| \quad (**)$
En groupant les résultats (*) et (**) on trouve $-|z_1 - z_2| \leq |z_1| - |z_2| \leq |z_1 - z_2| \iff \boxed{||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|}$.
3) Si on a $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$, comme dans la preuve de l'inégalité triangulaire, on peut tout élever au carré. Cela donne : $|z_1 + z_2|^2 = (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) = z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\text{Re}(z_1\overline{z_2})$ et $(|z_1| + |z_2|)^2 = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2|$.

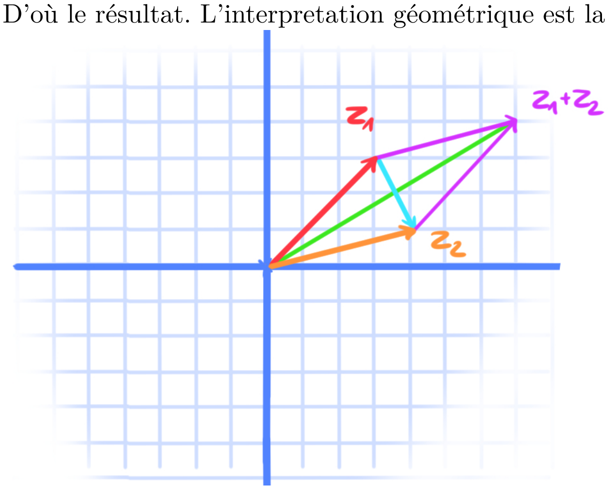
Donc
$$\begin{aligned} |z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| &\iff |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2\text{Re}(z_1\overline{z_2}) = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| \\ &\iff 2\text{Re}(z_1\overline{z_2}) = 2|z_1||z_2| \\ &\iff \text{Re}(z_1\overline{z_2}) = |z_1||\overline{z_2}| \\ &\iff \text{Re}(z_1\overline{z_2}) = |z_1\overline{z_2}| \end{aligned}$$
Par ailleurs, on rappelle (cours) que $\text{Re}(z) = |z| \iff z \in \mathbb{R}$. On a donc dans notre cas $z_1\overline{z_2} \in \mathbb{R}$, on a qu'à noter $z_1\overline{z_2} = \alpha \in \mathbb{R}$. Comme $z_2 \neq 0$, on peut diviser. On a donc $z_1 = \dfrac{\alpha}{\overline{z_2}} = \dfrac{\alpha}{|z_2|^2} z_2$ Si on pose $\lambda = \dfrac{\alpha}{|z_2|^2} \in \mathbb{R}$ alors on trouve bien $\boxed{z_1 = \lambda z_2}$

Exercice 7 : *(Identité du parallélogramme)* Montrer que $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ $\dfrac{1}{2}(|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2) = |z_1|^2 + |z_2|^2$.

Interpréter géométriquement ces conditions.

. . . .

Réponse : Il faut écrire les modules à l'aide des conjugués et ça tombe tout seul :
$$\begin{aligned} |z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 &= (z_1 + z_2)(\overline{z_1 + z_2}) + (z_1 - z_2)(\overline{z_1 - z_2}) \\ &= z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} + z_1\overline{z_1} - z_1\overline{z_2} - z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} \\ &= 2z_1\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} \\ &= 2(|z_1|^2 + |z_2|^2) \end{aligned}$$
D'où le résultat. L'interpretation géométrique est la suivante :



$|z_1+z_2|^2 + |z_1-z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$

On obtient une relation entre les longueurs des côtés d'un parallélogramme et ses diagonales.

Forme trigonométrique / exponentielle

Exercice 8 : *(En 1 minute)* Mettre sous forme trigonométrique, puis sous forme exponentielle les nombres suivants :
1) 1 **2)** $\sqrt{2} - \sqrt{2}i$ **3)** $-1 - \sqrt{3}i$ **4)** $\overline{\sqrt{3} - \sqrt{3}i}$ **5)** $-5i$ **6)** -32

7) $\cos(1) - i\sin(1)$ **8)** $\dfrac{1}{\cos(1) + i\sin(1)}$ **9)** $\dfrac{2}{\sqrt{3} + 3i}$ **10)** $(1+i)^2$ **11)** $(1+i)^3$
12) $e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot e^{i\frac{\pi}{3}}$ **13)** $ie^{1+i\frac{\pi}{3}}$ **14)** $-e^{\ln 2 + i\frac{\pi}{7}}$ **15)** $e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{i\frac{-\pi}{3}}$

. . . .

Réponse : Je les mets uniquement sous forme exponentielle :
1) e^{i0} **2)** $2e^{i\frac{-\pi}{4}}$ **3)** $2e^{i\frac{-2\pi}{3}}$ **4)** $\sqrt{6}e^{i\frac{\pi}{4}}$ **5)** $5e^{i\frac{-\pi}{2}}$ **6)** $32e^{-i\pi}$
7) e^{-i} **8)** e^{-i} **9)** $\dfrac{4}{\sqrt{3}}e^{i\frac{-\pi}{3}}$ **10)** $2e^{i\frac{\pi}{2}}$ **11)** $2\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}$
12) $e^{i\frac{7\pi}{12}}$ **13)** $e \cdot e^{i\frac{5\pi}{6}}$ **14)** $2e^{i\frac{8\pi}{7}}$ **15)** e^{i0}

<u>Exercice 9</u> : Soit $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, sous forme trigonométrique $z_1 = r_1(\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1))$ et $z_2 = r_2(\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2))$. Ecrire sous forme trigonométrique les nombres suivants :
1) $z_1 \cdot z_2$ **2)** $\dfrac{z_1}{z_2}$ **3)** e^{z_1} **4)** $e^{z_1+z_2}$.

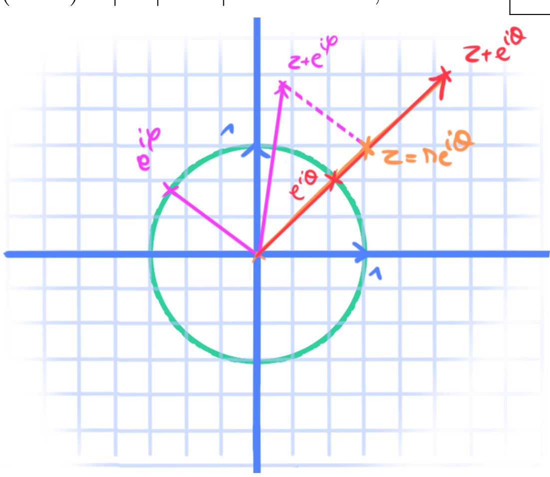
. . . .

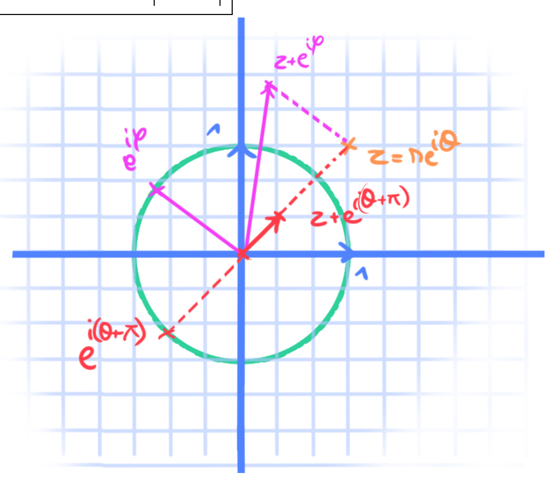
Réponse : **1)** $z_1 \cdot z_2 = r_1r_2(cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2))$ **2)** $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}(cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2))$
3) $e^{z_1} = e^{r_1cos\theta_1}(\cos(\sin\theta_1) + i\sin(\sin\theta_1))$
4) $e^{z_1+z_2} = e^{r_1cos\theta_1 + r_2cos\theta_2}(\cos(\sin\theta_1 + \sin\theta_2) + i\sin(\sin\theta_1 + \sin\theta_2))$

<u>Exercice 10</u> : On pose $z = re^{i\theta}$ et $E = \{|z + e^{i\varphi}| \mid \varphi \in \mathbb{R}\}$
1) Justifier que E est borné.
2) Calculer ses bornes supérieure et inférieure (on précisera s'il s'agit de minimum ou de maximum)

. . . .

Réponse : **1)** Déjà E est minoré par 0 car $|z + e^{i\varphi}| \geq 0$ pour tout $\phi \in \mathbb{R}$. Par ailleurs, d'après l'inégalité triangulaire, on a $\forall \varphi \in \mathbb{R}$:
$|z + e^{i\varphi}| < |z| + |e^{i\varphi}| = r + 1$. Donc $r+1$ est un majorant de E. On a donc E borné.
2) Pour la borne supérieure, on peut remarquer en faisant un schéma que pour $\varphi = \theta$, on atteint le majorant $r+1$. On a $|z + e^{i\theta}| = |re^{i\theta} + e^{i\theta}| = |(r+1)e^{i\theta}| = r+1$. Donc $\boxed{\max E = \sup E = r+1}$.
Pour la borne inf, on fait pareil, en utilisant l'autre inégalité triangulaire : on a $|z + e^{i\varphi}| \geq ||z| - |e^{i\varphi}|| = |r-1|$. On peut encre voir sur un schéma que poser $\varphi = \theta + \pi$ va fonctionner : on a $|z + e^{i(\theta+\pi)}| = |re^{i\theta} - e^{i\theta}| = |(r-1)e^{i\theta}| = |r-1|$. Finalement, on trouve $\boxed{\min E = \inf E = |r-1|}$





<u>Exercice 11</u> : *(linéarisation)* Linéariser les formes suivantes :
1) $\sin^3 x$ **2)** $\cos^5 x$ **3)** $\cos^3 x \cdot \sin x$ **4)** $\cos^2 x \cdot \sin^2 x$. **5)** $\cos x \cdot \sin^4 x$.

. . . .

$$\textbf{1)}\ \sin^3 x = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3 \begin{aligned}[t] &= \frac{i}{8}(e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}) \\ &= \frac{i}{8}((e^{3ix}+e^{-3ix}) - 3(e^{ix}-e^{-ix})) \\ &= \frac{1}{8}(2i\sin(3x) - 6i\sin x) \\ &= \frac{-1}{4}(\sin 3x - 3\sin x) \end{aligned}$$

Finalement $\boxed{\sin^3 x = \frac{-1}{4}\sin(3x) + \frac{3}{4}\sin x}$

$$\textbf{2)}\ \cos^5 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^5 \begin{aligned}[t] &= \frac{1}{32}(e^{5ix} + 5e^{3ix} + 10e^{ix} + 10e^{-ix} + 5e^{-3ix} + e^{-5ix}) \\ &= \frac{1}{32}\big((e^{5ix}+e^{-5ix}) + 5(e^{3ix}+e^{-3ix}) + 10(e^{ix}+e^{-ix})\big) \\ &= \frac{i}{32}(2\cos 5x + 10\cos 3x + 20\cos x) \\ &= \frac{1}{16}(\cos 5x + 5\cos 3x + 10\cos x) \end{aligned}$$

Finalement $\boxed{\cos^5 x = \frac{1}{16}\cos 5x + \frac{5}{16}\cos 3x + \frac{5}{8}\cos x}$

$$\textbf{3)}\ \cos^3 x\cdot\sin x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right) \begin{aligned}[t] &= \frac{-i}{16}\big(e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix})(e^{ix} - e^{-ix}\big) \\ &= \frac{-i}{16}\big(e^{4ix} - e^{2ix} + 3e^{2ix} - 3 + 3 - 3e^{-2ix} + e^{-2ix} - e^{-4ix}\big) \\ &= \frac{-i}{16}\big((e^{4ix} - e^{-4ix}) + 2(e^{2ix} - e^{-2ix})\big) \\ &= \frac{-i}{16}(2i\sin 4x + 4i\sin 2x) \\ &= \frac{1}{8}(\sin 4x + 2\sin 2x) \end{aligned}$$

Finalement $\boxed{\cos^3 x\cdot\sin x = \frac{1}{8}\sin 4x + \frac{1}{4}\sin 2x}$

4) $\cos^2 x\cdot\sin^2 x = \frac{1}{2}\sin(2x)^2 = \frac{1}{4}(1-\cos 4x) = \boxed{\frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos 4x.}$

$$\textbf{5)}\ \cos x\cdot\sin^4 x = \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)\left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^4 \begin{aligned}[t] &= \frac{1}{32}\big(e^{ix}+e^{-ix}\big)\big(e^{4ix} - 4e^{2ix} + 6 - 4e^{-2ix} + e^{-4ix}\big) \\ &= \frac{1}{32}\big(e^{5ix} + e^{3ix} - 4e^{3ix} - 4e^{ix} + 6e^{ix} + 6e^{-ix} - 4e^{-ix} - 4e^{-3ix} + e^{-3ix} + \\ &= \frac{1}{32}\big((e^{5ix}+e^{-5ix}) - 3(e^{3ix}+e^{-3ix}) + 2(e^{ix}+e^{-ix})\big) \\ &= \frac{1}{32}(2\cos 5x - 6\cos 3x + 4\cos x) \\ &= \frac{1}{16}(\cos 5x - 3\cos 3x + 2\cos x) \end{aligned}$$

Finalement $\boxed{\cos x\cdot\sin^4 x = \frac{1}{16}\cos 5x - \frac{3}{16}\cos 3x + \frac{1}{8}\cos x}$

<u>Exercice 12</u> : *(Formules de Simpson)* Pour $p, q \in \mathbb{R}$, montrer les égalités suivantes :

1) $\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$ **2)** $\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$

3) $\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$ **4)** $\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$

. . . .

1) $2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2} = 2\left(\frac{e^{i\frac{p+q}{2}} + e^{-i\frac{p+q}{2}}}{2}\right)\left(\frac{e^{i\frac{p-q}{2}} + e^{-i\frac{p-q}{2}}}{2}\right) = \frac{1}{2}(e^{ip} + e^{iq} + e^{-iq} + e^{ip})$

$= \frac{1}{2}(2\cos p + 2\cos q) = \cos p + \cos q$

2) **3)** **4)** Exactement la même méthode.

Résolution d'équations d'ordre 2

Exercice 13 : *(En 1 minute)* Trouver les racines des polynômes suivant, puis les factoriser :

1) x^2+2x+1 **2)** $2x^2-6x+4$ **3)** $-3x^2+45x-150$ **4)** $x^2+\frac{\sqrt{2}}{2}x+1$ **5)** $2x^2+2x+2$

6) $(x+1)^2+x$ **7)** x^2-1 **8)** x^2+1 **9)** $5x^2$ **10)** x^2-2x **11)** x^2-2x+2

....

Réponses : **1)** $x^2+2x+1=(x+1)^2$; Racine double : -1 **2)** $2x^2-6x+4=2(x-1)(x-2)$ Racines : 1 et 2

3) $-3x^2+45x-150=-3(x-10)(x-5)$ Racines : 5 et 10

4) $x^2+\sqrt{2}x+1=(x-e^{i\frac{\pi}{4}})(x-e^{i\frac{-\pi}{4}})$. Racines : $e^{i\frac{\pi}{4}}$ et $e^{i\frac{-\pi}{4}}$

5) $2x^2+2x+2=2(x-e^{i\frac{2\pi}{3}})(x-e^{i\frac{-2\pi}{3}})$ Racines $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{-2\pi}{3}}$

6) $(x+1)^2+x=x^2+3x+1=\left(x+\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\left(x+\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)$ Racines : $\frac{-3-\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{-3+\sqrt{5}}{2}$

7) $x^2-1=(x+1)(x-1)$ Racines : 1 et -1 **8)** $x^2+1=(x-i)(x+i)$ Racines i et $-i$

9) $5x^2$ déjà factorisé, Racine double : 0 **10)** $x^2-2x=x(x-2)$ Racines : 0 et 2

11) $x^2-2x+2=(x-1+i)(x-1-i)$ Racines : $1+i$ et $1-i$.

Exercice 14 : *(En 1 minute)* Calculer les racines carrées des nombres complexes suivants :

1) -2 **2)** i **3)** $-i$ **4)** $4-3i$ **5)** $\cos(1)+i\sin(1)$ **6)** e^{1+2i}

....

Réponses : **1)** $\pm\sqrt{2}i$ **2)** $\pm\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ **3)** $\pm\frac{1-i}{\sqrt{2}}$

4) $4-3i$ On résout $\begin{cases} a^2-b^2=4 \\ 2ab=-3 \\ a^2+b^2=5 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2=\frac{9}{2} \\ b^2=\frac{1}{2} \\ 2ab=-3 \end{cases} \iff \begin{cases} a=\pm\frac{3\sqrt{2}}{2} \\ b=\pm\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2ab=-3 \end{cases}$ On a $2ab<0$ donc a et b sont de signe opposés et les racines carrées sont $a+ib=\frac{3\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i$ ou $\frac{-3\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i$

5) $\cos(1)+i\sin(1)$: les racines sont $\pm e^{\frac{i}{2}}$ **6)** e^{1+2i} Les racines sont $\pm\sqrt{e}\cdot e^{i}$

Exercice 15 : *(Racines carrées plus compliquées)* Calculer les racines carrées des nombres complexes suivants :

1) $5+12i$ **2)** $-32+24i$ **3)** $-15-8i$ **4)** $21-20i$ **5)** $48+14i$ **6)** $1+2i$

....

Réponses : Dans les premiers, la difficulté est surtout de calculer le module.

1) $|5+12i|=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=13$ Racines : $\pm(3+2i)$

2) $|-32+24i|=8|-4+3i|=8\cdot 5=40$ Racines : $\pm(2+6i)$

3) $|-15-8i|=\sqrt{225+64}=\sqrt{289}=17$ Racines : $\pm(1+4i)$

4) $|21-20i|=\sqrt{441+400}=\sqrt{841}=29$ Racines : $\pm(5-2i)$

5) $|48+14i|=2|24+7i|=2\sqrt{576+49}=2\sqrt{625}=50$ Racines : $\pm(7+i)$

6) $1+2i$ On résout $\begin{cases} a^2-b^2=1 \\ 2ab=2 \\ a^2+b^2=\sqrt{5} \end{cases} \iff \begin{cases} a^2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \\ b^2=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 2ab=2 \end{cases} \iff \begin{cases} a=\pm\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}} \\ b=\pm\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}} \\ ab=1 \end{cases}$ $ab=1$ donc a et b sont de même signe donc on trouve les racines $a+ib=\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}+i\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$ et $-\sqrt{\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}}-i\sqrt{\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}$

Exercice 16 : *(Problème)* Soit $Z=\dfrac{1+i}{\sqrt{2}}$

1) Calculer sous forme algébrique les racines carrés complexes de Z.
2) Calculer ces racines carrées sous forme trigonométrique cette fois.
3) En déduire une expression de $\cos\dfrac{\pi}{8}$ et $\sin\dfrac{\pi}{8}$.
4) Proposer une méthode pour calculer $\cos\dfrac{\pi}{12}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}$, puis les calculer.

....

Réponses : **1)** On résout $\begin{cases} a^2-b^2=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ 2ab=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ a^2+b^2=1 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2=\dfrac{2+\sqrt{2}}{4} \\ b^2=\dfrac{2-\sqrt{2}}{4} \\ 2ab=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \iff \begin{cases} a=\pm\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \\ b=\pm\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2} \\ 2ab=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

$ab>0$ donc a et b sont de même signe. On en déduit la racine carrée sous forme algébrique $z_1=a+ib=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ ou $z_2=-\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}-i\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

2) C'est plus facile. On a $Z=e^{i\frac{\pi}{4}}$ les racines carrées de Z sont donc $\pm e^{i\frac{\pi}{8}}$ sous forme trigonométrique on a donc $e^{i\frac{\pi}{8}}$ et $e^{i\frac{9\pi}{8}}$.
3) On identifie facilement $z_1=e^{i\frac{\pi}{8}}$ car $\cos\dfrac{\pi}{8}>0$ d'après le cercle trigonométrique. On en déduit par identification de la partie réelle et imaginaire : $\boxed{\cos\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2} \text{ et } \sin\dfrac{\pi}{8}=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$

4) On utilise que $e^{i\frac{\pi}{12}}$ est la racine carrée de $e^{i\frac{\pi}{6}}=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$. On résout $\begin{cases} a^2-b^2=\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ 2ab=\dfrac{1}{2} \\ a^2+b^2=1 \end{cases} \iff \begin{cases} a^2=\dfrac{1+\sqrt{3}}{4} \\ b^2=\dfrac{\sqrt{3}-1}{4} \\ ab=\dfrac{1}{4} \end{cases}$

a et b doivent être de même signe, on trouve donc $e^{i\frac{\pi}{12}}=\dfrac{\sqrt{1+\sqrt{3}}}{2}+i\dfrac{\sqrt{\sqrt{3}-1}}{2}$

On en déduit par identification de la partie réelle et imaginaire : $\boxed{\cos\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2} \text{ et } \sin\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}}$

Exercice 17 : *(Complexes et sommes ★★ - ★★★)* Calculer les sommes suivantes en fonction de n :

1) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos k$ **2)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sin k$ **3)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\binom{4n}{2k}(-1)^k$ **4)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1}\binom{4n}{2k+1}(-1)^k$

....

Réponses : **1)** et **2)** On les met ensemble, on note $C=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos k$ et $S=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\sin k$.

On a $C+iS=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos k+i\sin k=\sum_{k=0}^{n}e^{ik}=\dfrac{1-e^{(n+1)i}}{1-e^{i}}=\dfrac{e^{\frac{n+1}{2}i}}{e^{\frac{i}{2}}}\cdot\dfrac{e^{-\frac{n+1}{2}i}-e^{\frac{n+1}{2}i}}{e^{\frac{-i}{2}}-e^{\frac{i}{2}}}=e^{\frac{n}{2}i}\dfrac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)}$

(explication : On reconnait dans un premier temps une somme géométrique, puis on utilise la technique de l'angle moitié.)

Ainsi $C = \mathrm{Re}\left(e^{\frac{n}{2}i}\dfrac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)}\right)$ et $S = \mathrm{Im}\left(e^{\frac{n}{2}i}\dfrac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)}\right)$ On trouve donc $\boxed{C = \cos\left(\frac{n}{2}\right)\dfrac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)} \text{ et } S = \sin\left(\frac{n}{2}\right)\dfrac{\sin\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\right)}}$

3) et **4)** Sont à faire ensemble aussi. Notons $A = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\binom{4n}{2k}(-1)^k$ et $B = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n-1}\binom{4n}{2k+1}(-1)^k$.

La forme de A et B fait penser au binôme de Newton. Par ailleurs, A semble contenir les indices paires de la somme et B les indices impaires.

On souhaite reconnaitre dans A une somme de termes paires, ainsi on peut faire apparaitre $2k$ partout, par exemple en ecrivant $(-1)^k = i^{2k}$ et dans B, on peut faire pareil avec les termes impaires, mais pour avoir $2k+1$ il faudra multiplier par i :

On remarque que $A + iB = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n}\binom{4n}{2k}(-1)^k + \sum_{k=0}^{2n-1}\binom{4n}{2k+1}(-1)^k i = \sum_{k=0}^{2n}\binom{4n}{2k}i^{2k} + \sum_{k=0}^{2n-1}\binom{4n}{2k+1}i^{2k+1}$

On remarque ainsi que les deux sommes peuvent être regroupées en une seule car elles parcourent tous les entiers paires et impaires compris entre 0 et $4n$. Ainsi : $A+iB = \displaystyle\sum_{k=0}^{4n}\binom{4n}{k}i^k = (1+i)^{4n} = \left((1+i)^4\right)^n = (-4)^n$.

En conclusion en identifiant la partie réelle et la partie imaginaire, on trouve : $\boxed{A = (-4)^n \text{ et } B = 0}$

<u>Exercice 18</u> : *(Complexes et intégrales ★★)* Calculer les intégrales suivantes :

1) Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)e^{\alpha x}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)e^{\alpha x}\,\mathrm{d}x$. **2)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\,\mathrm{d}x$ **3)** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\,\mathrm{d}x$

. . . .

Réponses : **1)** On note $C = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)e^{\alpha x}\,\mathrm{d}x$ et $S = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)e^{\alpha x}\,\mathrm{d}x$

On a $C + iS = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ix}e^{\alpha}x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{(i+\alpha)x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{e^{(i+\alpha)x}}{i+\alpha}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{e^{(i+\alpha)\frac{\pi}{2}}-1}{i+\alpha} = \frac{(-1+ie^{\frac{\alpha\pi}{2}})(\alpha-i)}{\alpha^2-1} = \frac{\alpha+e^{\frac{\alpha\pi}{2}}-i(\alpha e^{\frac{\alpha\pi}{2}}+1)}{\alpha^2+1}$

En identifiant la partie réelle et imaginaire : $\boxed{\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)e^{\alpha x}\,\mathrm{d}x = \frac{\alpha+e^{\frac{\alpha\pi}{2}}}{\alpha^2+1} \text{ et } \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x)e^{\alpha x}\,\mathrm{d}x = -\frac{\alpha e^{\frac{\alpha\pi}{2}}+1}{\alpha^2+1}}$

2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\,\mathrm{d}x$. On utilise la linéarisation de l'exercice 11 :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{16}\cos 5x + \frac{5}{16}\cos 3x + \frac{5}{8}\cos x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 5x\,\mathrm{d}x + \frac{5}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x\,\mathrm{d}x + \frac{5}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{16}\left[\frac{1}{5}\sin 5x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{5}{16}\left[\frac{1}{3}\sin 3x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{5}{8}\left[\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{16}\frac{1}{5}\sin\frac{5\pi}{2} + \frac{5}{16}\frac{1}{3}\sin\frac{3\pi}{2} + \frac{5}{8}\sin\frac{\pi}{2} \\
&= \frac{1}{8}\left(\frac{1}{2\cdot 5} - \frac{5}{2\cdot 3} + 5\right) = \frac{1}{8}\cdot\frac{3-25+150}{30} = \frac{1}{8}\cdot\frac{128}{30} = \frac{8}{15}
\end{aligned}$$

Ainsi $\boxed{\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x\,\mathrm{d}x = \frac{8}{15}}$

3) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x\,\mathrm{d}x$ Il faut déjà linéariser $\sin^6 x$:

$$\sin^6 x = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^6 = \frac{-1}{64}\left(e^{6ix}-6e^{4ix}+15e^{2ix}-20+15e^{-2ix}-6e^{-4ix}+e^{-6ix}\right)$$
$$= \frac{-1}{64}\left((e^{6ix}+e^{-6ix})-6(e^{4ix}+e^{-4ix})+15(e^{2ix}+e^{-2ix})-20\right)$$
$$= -\frac{1}{64}(2\cos 6x-12\cos 4x+30\cos 2x-20)$$
$$= \frac{-1}{32}\cos 6x+\frac{3}{16}\cos 4x-\frac{15}{32}\cos 2x+\frac{5}{16}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \ \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-1}{32}\cos 6x+\frac{3}{16}\cos 4x-\frac{15}{32}\cos 2x+\frac{5}{16} \ \mathrm{d}x$$
$$= \frac{-1}{32}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 6x \ \mathrm{d}x+\frac{3}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4x \ \mathrm{d}x+\frac{15}{32}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x \ \mathrm{d}x+\frac{5}{16}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \ \mathrm{d}x$$
$$= \frac{-1}{32}\left[\frac{1}{6}\sin 6x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{3}{16}\left[\frac{1}{4}\sin 4x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{15}{32}\left[\frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{5}{16}\cdot\frac{\pi}{2}$$
$$= 0+0+0+\frac{5\pi}{32}$$

Ainsi $\boxed{\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 x \ \mathrm{d}x = \frac{5\pi}{32}}$

Résolution d'équations trigonométriques

Exercice 19 : *(Application directe)* ★ - ★★ Résoudre les équations suivantes d'inconnue θ :

1) $\cos\theta+\sin\theta=1$ **2)** $3\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta=\sqrt{6}$ **3)** $\cos\theta-2\sin\theta=4$ **4)** $\cos\theta-\sin\theta=\frac{1}{2}$

....

Réponses :

$$\mathbf{1)}\ \cos\theta+\sin\theta=1 \iff \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta+\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\right)=1$$
$$\iff \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}\cos\theta+\sin\frac{\pi}{4}\sin\theta\right)=1$$
$$\iff \cos\left(\theta-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\iff \exists k\in\mathbb{Z} \mid \theta-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{4}+2k\pi \text{ ou } \theta-\frac{\pi}{4}=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$$
$$\iff \exists k\in\mathbb{Z} \mid \theta=\frac{\pi}{2}+2k\pi \text{ ou } \theta=2k\pi$$

Donc $\boxed{S=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\{2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right\}}$

$$\mathbf{2)}\ 3\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta=\sqrt{6} \iff 2\sqrt{3}\left(\frac{3}{2\sqrt{3}}\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}\sin\theta\right)=\sqrt{6}$$
$$\iff 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{-\pi}{6}\cos\theta+\sin\frac{-\pi}{6}\sin\theta\right)=\sqrt{6}$$
$$\iff \cos\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\iff \exists k\in\mathbb{Z} \mid \theta+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{4}+2k\pi \text{ ou } \theta+\frac{\pi}{6}=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$$
$$\iff \exists k\in\mathbb{Z} \mid \theta=\frac{\pi}{12}+2k\pi \text{ ou } \theta=\frac{-5\pi}{12}+2k\pi$$

Donc $\boxed{S=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left\{\frac{\pi}{12}+2k\pi,\frac{-5\pi}{12}+2k\pi\right\}}$

3) $\cos\theta-2\sin\theta=4.$

En analysant le problème, on remarque que $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $\cos\theta \leq 1$ et $-2\sin\theta \leq 2$ ainsi $\cos\theta - 2\sin\theta \leq 3$. Donc il n'y a aucune solution sur $\mathbb{R}$. Ainsi $\boxed{S = \emptyset}$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{4)}\cos\theta - \sin\theta = \frac{1}{2} \quad & \iff \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\theta - \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\theta\right) = 1 \\
& \iff \sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4}\cos\theta + \sin\frac{-\pi}{4}\sin\theta\right) = 1 \\
& \iff \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4} \\
& \iff \exists k \in \mathbb{Z} \mid \theta + \frac{\pi}{4} = \arccos\frac{\sqrt{2}}{4} + 2k\pi \text{ ou } \theta + \frac{\pi}{4} = -\arccos\frac{\sqrt{2}}{4} + 2k\pi \\
& \iff \exists k \in \mathbb{Z} \mid \theta = -\frac{\pi}{4} + \arccos\frac{\sqrt{2}}{4} + 2k\pi \text{ ou } \theta = -\frac{\pi}{4} - \arccos\frac{\sqrt{2}}{4} + 2k\pi
\end{aligned}
$$

Donc $\boxed{S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{-\frac{\pi}{4} + \arccos\frac{\sqrt{2}}{4} + 2k\pi, -\frac{\pi}{4} - \arccos\frac{\sqrt{2}}{4} + 2k\pi\right\}}$

<u>Exercice 20</u> : ★★★ Résoudre $\sin^2\theta + \frac{1}{2}\sin(2\theta) = 1$

....

1) L'idée est d'essayer de se ramener aux la situations de l'exercice 19. Pour cela, au lieu de factoriser, comme on en a l'intuition, il faut plutôt linéariser l'équation.

On peut utiliser les formules d'Euler ou la formule $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta \implies \sin^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta)$

Ainsi : $\sin^2\theta + \frac{1}{2}\sin(2\theta) = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta) + \frac{1}{2}\sin 2\theta$. Ensuite on résout normalement :

$$
\begin{aligned}
\sin^2\theta + \frac{1}{2}\sin(2\theta) = 1 \quad & \iff \frac{1}{2}(1 - \cos 2\theta) + \frac{1}{2}\sin 2\theta = 1 \\
& \iff -\frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta = \frac{1}{2} \\
& \iff -\cos 2\theta + \sin 2\theta = 1 \\
& \iff \sqrt{2}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos 2\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin 2\theta\right) = 1 \\
& \iff \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}\cos\theta + \sin\frac{3\pi}{4}\sin\theta\right) = 1 \\
& \iff \cos\left(2\theta - \frac{3\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
& \iff \exists k \in \mathbb{Z} \mid 2\theta - \frac{3\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } 2\theta - \frac{3\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \\
& \iff \exists k \in \mathbb{Z} \mid 2\theta = \pi + 2k\pi \text{ ou } 2\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\
& \iff \exists k \in \mathbb{Z} \mid \theta = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ ou } \theta = \frac{\pi}{4} + k\pi
\end{aligned}
$$

Donc $\boxed{S = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{4} + k\pi\right\}}$

<u>Exercice 21</u> : ★ - ★★★ Soit $E = \{3\cos\theta - 4\sin\theta \mid \theta \in \mathbb{R}\}$

1) Montrer que E est borné. **2)** Calculer $\sup E$ et $\inf E$.

....

1) <u>Méthode 1 : Majorant et Minorant</u>

On a $-1 \leq \cos\theta \leq 1 \implies -3 \leq 3\cos\theta \leq 3 \qquad (1)$
et $-1 \leq \sin\theta \leq 1 \implies -4 \leq 4\sin\theta \leq 4 \implies -4 \leq -4\sin\theta \leq 4 \qquad (2)$
Donc en faisant (1)+(2), on trouve :$-7 \leq 3\cos\theta - 4\sin\theta \leq 7$. Donc E est majoré par 7 et minoré par -7 donc borné.

Méthode 2 : Majorant de la valeur absolue (plus rapide)

On a $\underbrace{|3\cos\theta - 4\sin\theta| \leq |3\cos\theta| + |-4\sin\theta|}_{\text{par inégalité triangulaire}} \leq 3|\cos\theta| + 4|\sin\theta| \leq 3 + 4 \leq 7$.
Donc les valeurs absolues des éléments de E sont majorées par 7 et E est borné.

2) Si on pose $z = 3 - 4i$ alors $|z| = 5$ donc $z = 5e^{i\varphi}$ sous forme exponentielle. On en déduit que : $3\cos\theta - 4\sin\theta = 5\cos\varphi\cos\theta + 5\sin\varphi\sin\theta = 5\cos(\theta - \varphi)$
Ainsi $-5 \leq 5\cos(\theta - \varphi) \leq 5 \implies -5 \leq 3\cos\theta - 4\sin\theta \leq 5$.
5 est donc un majorant de E et -5 un minorant de E.
Par ailleurs, pour $\theta = \varphi$, on a $3\cos\theta - 4\sin\theta = 5\cos(\theta - \varphi) = 5\cos 0 = 5 \in E$ pour $\theta = \varphi + \pi$, on a $3\cos\theta - 4\sin\theta = 5\cos(\theta - \varphi) = 5\cos\pi = -5 \in E$

Ainsi $\boxed{\max E = \sup E = 5 \text{ et } \min E = \inf E = -5}$.
