TD 7 - Suites usuelles

BCPST 1 — Feuille d'exercice — Année 2023- 2024

Propriétés des suites

Exercice 1 : ♡ Donner la monotonie des suites suivantes, dont le terme général est défini pour tout $n \in \mathbb{N}$: **1)** $u_n = 3n + 2$ **2)** $u_n = \dfrac{-1}{n+1}$ **3)** $u_n = 2^n$ **4)** $u_n = 3^{-n}$

5) $u_n = \ln(1+n)$ **6)** $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ **7)** $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{n^2 u_n}{1+n^2} \end{cases}$ **8)** $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \ln(k+1)$

9) $u_n = \dfrac{(2n)!}{n!}$ **10)** $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k$ **11)** $u_n = n^n$

Exercice 2 : ♡ Sur les suites de la question précédente, dire si elles sont majorées, minorées, bornées et expliciter un majorant et un minorant quand c'est possible.

Exercice 3 : ★ Donner la monotonie des suites suivantes :
1) $\forall n \geq 1$, $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$ **2)** $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{2n+1}{5n+2}$ **3)** $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1}{2^n}\dbinom{2n}{n}$

Exercice 4 : ★ Si u, v sont deux suites bornées, Montrer que $u + v$ et $u \cdot v$ sont bornées.

Exercice 5 : ★ Si u, v sont deux suites croissantes, Montrer que $u + v$ est croissante.
Montrer par contre que $u \cdot v$ n'est as forcément croissante, en trouvant un contre-exemple.

Suites extraites

Exercice 6 : *(Apprentissage ★)* Soit $(u_n)_n$ la suite de terme général $u_n = 2^n$. Donner le terme général des suites extraites de u_n suivantes : **1)** $(u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ **2)** $(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ **3)** $(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ **4)** $(u_{3n+2})_{n\in\mathbb{N}}$
5) $(u_{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ **6)** $(u_{3^n})_{n\in\mathbb{N}}$ **7)** $(u_{2^n+3^n})_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice 7 : *(Suites extraites de suites extraites ★★)* Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite. Parmi toutes ces suites extraites d $(u_n)_n$, déterminer lesquelles sont extraites l'une de l'autre :
★$(u_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ ★$(u_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ ★$(u_{2n+2})_{n\in\mathbb{N}}$ ★$(u_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ ★$(u_{6n})_{n\in\mathbb{N}}$ ★$(u_{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ ★$(u_{2^{n+1}})_{n\in\mathbb{N}}$
★$(u_{3^n})_{n\in\mathbb{N}}$ ★$(u_{2^n \cdot 3^n})_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice 8 : ★★★ Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
1) Montrer que u est bornée $\iff$ Toutes les suites extraites de u sont bornées.
2) Montrer que u est croissante $\iff$ Toutes les suites extraites de u sont croissantes.

Suites récurrentes.

Exercice 9 : ♡ Calculer le terme général des suites suivantes :

1) $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + 1 \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$ **3)** $\begin{cases} u_0 = 11 \\ u_{n+1} = u_n \end{cases}$ **4)** $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 10u_n \end{cases}$

5) $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = -u_n \end{cases}$ **6)** $\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = u_n + 8 \end{cases}$ **7)** $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = (-3) \cdot u_n \end{cases}$ **8)** $\begin{cases} u_0 = 11 \\ u_{n+1} = -u_n + 2 \end{cases}$

9) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ 2u_{n+1} + u_n = 0 \end{cases}$ **10)** $\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} - 2 = u_n + 4 \end{cases}$ **11)** $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = -u_n - 1 \end{cases}$ **12)** $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 7u_n + 2 \end{cases}$

13) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ 2u_{n+1} + 3u_n = 5 \end{cases}$ **14)** $\begin{cases} u_0 = 8 \\ 6u_{n+1} + 2 = 9u_n + 1 \end{cases}$ **15)** $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} - 2u_n = 3 \end{cases}$ **16)** $\begin{cases} u_0 = 0 \\ 2u_{n+1} - 2u_n = 2 \end{cases}$

Exercice 10 : ★ - ★★ - ★★★ En vous ramenant à des suites usuelles, calculer le terme général des suites suivantes définies par récurrence :

1) $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = 2|u_n| \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = (-1)^n u_n \end{cases}$ **3)** $\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = (-2)^n u_n \end{cases}$ **4)** $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = (-2)^n u_n + 2 \end{cases}$

5) $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n^2 \end{cases}$ **6)** $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 3\sqrt{u_n} \end{cases}$ **7)** $\begin{cases} u_0 = \dfrac{3}{5} \\ u_{n+1} = \lfloor 2u_n \rfloor + \dfrac{3}{5} \end{cases}$ **8)** $\begin{cases} u_0 = \dfrac{\pi}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{\pi}{2} \cdot \cos(u_n) \end{cases}$

9) $\begin{cases} u_0 = u_1 = a \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n + u_{n+2}}{2} \end{cases}$ (On se ramènera à une suite arithmétique)

Exercice 11 : *(Récurrence d'ordre 2* ★ *)* Calculer le terme général des suites suivantes définies par récurrence :

1) $\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+2} + 2u_{n+1} = 3u_n \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} u_0 = 1 \ , \ u_1 = 3 \\ 3u_{n+2} - 6u_{n+1} + 3u_n = 0 \end{cases}$ **3)** $\begin{cases} u_0 == u_1 = 1 \\ u_{n+2} = -2u_n \end{cases}$

4) $\begin{cases} u_0 = 0 \ , \ u_1 = 1 \\ u_n = u_{n+1} + u_{n-1} \text{ pour } n \geq 1 \end{cases}$

Exercice 12 : *(Récurrence d'ordre 2 particulières* ★★ - ★★★ *)* Calculer le terme général des suites suivantes définies par récurrence :

1) $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 0 \in \mathbb{R} \\ 2u_{n+2} + 5u_{n+1} - 3u_n = 1 \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} u_0 = 0 \ , \ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n + n \end{cases}$

Exercice 13 : ★★ On définit par récurrence la suite $(u_n)_n$: $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N} \ , \ u_{n+1} = 3u_n + 2 - 2n$
1) Calculer les cinq premiers termes de la suite u_n. **2)** Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} \ , \ u_n \geq n$
3) En déduire que la suite u_n est croissante.
4) On pose $v_n = u_n - n$. Montrer que v_n est une suite arthmético-géométrique.
5) En déduire le terme général de v_n, puis celui de u_n.

Exercice 14 : ★ On définit par récurrence la suite $(u_n)_n$: $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N} \ , \ u_{n+1} = \dfrac{3u_n + 1}{2u_n + 4}$
1) Montrer que la suite est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{2u_n - 1}{u_n + 1}$. Justifier que la suite v est bien définie.
3) Trouver une relation de récurrence que vérifie la suite v, en déduire les valeurs de v_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
4) En déduire l'expression du terme général u_n en fonction de n.

Exercice 15 : ★ On définit par récurrence les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \ , \begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + v_n \end{cases}$$

1) Calculer les trois premiers termes des suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$.
2) Montrer que la suite $(u_n + v_n)_n$ est géométrique et la calculer.
3) Montrer que la suite $(u_n - v_n)_n$ est géométrique et la calculer.
4) En déduire le terme général de $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$.

Exercice 16 : ★★★ On définit par récurrence les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N} \ , \begin{cases} u_{n+1} = 4u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = u_n + 5v_n \end{cases}$$

Calculer les termes généraux u_n et v_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$