

TD - Suites usuelles

BCPST 1

Feuille d'exercice

Année 2022- 2023

Vocabulaire des suites

Exercice 1 : (En 1 minute) Donner la monotonie des suites suivantes, dont le terme général est défini pour

tout $n \in \mathbb{N}$:

1) $u_n = 3n + 2$ 2) $u_n = \frac{-1}{n+1}$ 3) $u_n = 2^n$ 4) $u_n = 3^{-n}$

5) $u_n = \ln(1+n)$ 6) $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ 7) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{n^2 u_n}{1+n^2} \end{cases}$ 8) $u_n = \prod_{k=1}^n \ln(k+1)$

9) $u_n = \frac{(2n)!}{n!}$ 10) $u_n = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k$ 11) $u_n = n^n$

.....

1) $n+1 > n \Rightarrow 3(n+1) > 3n \Rightarrow 3(n+1) + 2 > 3n + 2 \Rightarrow u_{n+1} > u_n$ Donc strictement croissante

2) $n+1 > n \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{-1}{n+1} > \frac{-1}{n}$ donc strictement croissante

3) $u_n = 2^n$ Pareil que les précédents : strictement croissante. 4) $u_n = 3^{-n} = \frac{1}{3^n}$ La suite (3^n) est croissante donc u_n est strictement décroissante

5) $u_n = \ln(1+n)$ 6) $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$ 7) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{n^2 u_n}{1+n^2} \end{cases}$ 8) $u_n = \prod_{k=1}^n \ln(k+1)$

9) $u_n = \frac{(2n)!}{n!}$ 10) $u_n = \sum_{k=1}^{2n} (-1)^k k$

11) $u_n = n^n$ On a $n+1 > n \Rightarrow (n+1)^{n+1} > n^{n+1} \geq n^n \Rightarrow u_{n+1} > u_n$ Donc la suite est strictement croissante.

Exercice 2 : (En 1 minute) Sur les suites de la question précédente, dire si elles sont majorées, minorées, bornées et expliciter un majorant et un minorant quand c'est possible.

Exercice 3 : Donner la monotonie des suites suivantes :

1) $\forall n \geq 1, u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k}$ 2) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{2n+1}{5n+2}$ 3) $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{2^n} \binom{2n}{n}$

.....

Réponses : 1) Soit $n \geq 0$, on regarde $u_{n+1} - u_n = \sum_{k=n+1}^{2n+2} \frac{1}{k} - \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n} = \frac{2n^2 + 2n + 2n^2 + n - (2n+2)(2n+1)}{n(2n+2)(2n+1)} = \frac{4n^2 + 3n - 4n^2 - 7n - 2}{n(2n+2)(2n+1)} = \frac{-4n - 2}{n(2n+2)(2n+1)} = \frac{-1}{n(n+1)} < 0$.

La suite est donc strictement décroissante.

2) On pose $f(x) = \frac{2x+1}{5x+2}$ et on étudie les variations de f . Elle est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+$, donc $\forall x \geq 0, f'(x) = \frac{2(5x+1) - 5(2x+1)}{(5x+2)^2} = \frac{-3}{(5x+2)^2} < 0$ pour tout x . f est donc strictement décroissante

et la suite u_n est strictement décroissante aussi.

3) On a $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2}$ Donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{2(n+1)^2} = \frac{2n+1}{n+1} = 1 + \frac{1}{n+1} > 1$ Donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$ et

$u_{n+1} > u_n$ car $u_n \geq 0$, donc elle est strictement croissante.

4)

Exercice 4 : Si u, v sont deux suites bornées, Montrer que $u+v$ et $u \cdot v$ sont bornées.

Exercice 5 : Si u, v sont deux suites croissantes, Montrer que $u + v$ est croissante.
Montrer par contre que $u \cdot v$ n'est pas forcément croissante, en trouvant un contre-exemple.

Suites extraites

Exercice 6 : (*Apprentissage*) Soit $(u_n)_n$ la suite de terme général $u_n = 2^n$. Donner le terme général des suites extraites de u_n suivante. Justifier que ce sont bien des suites extraites : **1)** $(u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ **2)** $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$
3) $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ **4)** $(u_{3n+2})_{n \in \mathbb{N}}$ **5)** $(u_{2^n})_{n \in \mathbb{N}}$ **6)** $(u_{3^n})_{n \in \mathbb{N}}$ **7)** $(u_{2^n+3^n})_{n \in \mathbb{N}}$

Réponses : Ce sont bien des suites extraites car les fonctions sont toujours strictement croissantes : $n \mapsto n+1$, $n \mapsto 2^n$, $n \mapsto 3n+2$, ... sont à valeur dans $\mathbb{N}$ et strictement croissantes.

1) $u_{n+1} = 2^{n+1}$ **2)** $u_{2n} = 2^{2n} = 4^n$ **3)** $u_{2n+1} = 2^{2n+1} = 2 \cdot 4^n$ **4)** $u_{3n+2} = 4 \cdot 8^n$
5) $u_{2^n} = 2^{2^n}$ **6)** $u_{3^n} = 2^{3^n}$ **7)** $u_{2^n+3^n} = 2^{2^n} \cdot 2^{3^n}$

Exercice 7 : (*Suites extraites de suites extraites*) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite. Parmi toutes ces suites extraites d $(u_n)_n$, préciser leur premier terme, puis déterminer lesquelles sont extraites l'une de l'autre :

★ $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ ★ $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ ★ $(u_{2n+2})_{n \in \mathbb{N}}$ ★ $(u_{3n})_{n \in \mathbb{N}}$ ★ $(u_{6n})_{n \in \mathbb{N}}$ ★ $(u_{2^n})_{n \in \mathbb{N}}$ ★ $(u_{2^n+1})_{n \in \mathbb{N}}$
★ $(u_{3^n})_{n \in \mathbb{N}}$ ★ $(u_{2^n \cdot 3^n})_{n \in \mathbb{N}}$

Réponses : D'abord les premiers termes, ils se calculent en remplaçant simplement n par 0. :

	u_n	u_{2n}	u_{2n+1}	u_{2n+2}	u_{3n}	u_{6n}	u_{2^n}	u_{2^n+1}	u_{3^n}	$u_{2^n \cdot 3^n}$
premier terme	u_0	u_0	u_1	u_2	u_0	u_0	u_1	u_2	u_1	u_1

Je mets dans le tableau si la suite d'en haut est extraite de la suite de gauche.

	u_n	u_{2n}	u_{2n+1}	u_{2n+2}	u_{3n}	u_{6n}	u_{2^n}	u_{2^n+1}	u_{3^n}	$u_{2^n \cdot 3^n}$
u_n	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui
u_{2n}	Non	Oui	Non	Oui	Non	Oui	Non ⁽¹⁾	Oui	Non	Non
u_{2n+1}	Non	Non	Oui	Non	Oui	Non	Non	Non	Oui	Non
u_{2n+2}	Non	Non	Non	Oui	Non	Non	Non	Oui	Non	Non
u_{3n}	Non	Non	Non	Non	Oui	Oui	Non	Non	Non	Non
u_{6n}	Non	Non	Non	Non	Non	Oui	Non	Non	Non	Non
u_{2^n}	Non	Non	Non	Non	Non	Non	Oui	Oui	Non	Oui
u_{2^n+1}	Non	Non	Non	Non	Non	Non	Non	Oui	Non	Oui
u_{3^n}	Non	Non	Non	Non	Non	Non	Non	Non	Oui	Oui
$u_{2^n \cdot 3^n}$	Non	Non	Non	Non	Non	Non	Non	Non	Non	Oui

⁽¹⁾ le premier terme de (u_{2^n}) est u_1 donc la suite n'est pas extraite de $(u_{2n})_n$ qui ne contient pas u_1 dans ses termes.

Exercice 8 : Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$. **1)** Montrer que u est bornée $\iff$ Toutes les suites extraites de u sont bornées. **2)** Montrer que u est croissante $\iff$ Toutes les suites extraites de u sont croissantes.

Réponses : **1)** $\Leftarrow$ est direct car (u_n) est une suite extraite d'elle même, donc si toutes les suites extraites sont bornées, en particulier u_n est bornée.

$\Rightarrow$] On prend $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante. On a $\forall n \in \mathbb{N}, |u_n| \leq M$ donc comme $\varphi(n) \in \mathbb{N}$, on a aussi $\forall n \in \mathbb{N}, |u_{\varphi(n)}| \leq M$. Donc $(u_{\varphi(n)})_n$ est bornée. Toute suite extraite est donc bornée.

2) $\Leftarrow$ est direct car (u_n) est une suite extraite d'elle même, donc si toutes les suites extraites sont croissantes, en particulier u_n est croissante.

$\Rightarrow$] On prend $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ strictement croissante. On a $\forall n, m \in \mathbb{N}, m \geq n \implies u_m \geq u_n$ or donc comme φ est strictement croissante, on a aussi $\forall n, m \in \mathbb{N}, m \geq n \implies \varphi(m) \geq \varphi(n) \implies u_{\varphi(m)} \geq u_{\varphi(n)}$. Donc $(u_{\varphi(n)})_n$ est croissante. Toute suite extraite est donc croissante.

Suites récurrentes.

Exercice 9 : (En 1 minute) Calculer le terme général des suites suivantes :

- 1) $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = u_n + 1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n \end{cases}$ 3) $\begin{cases} u_0 = 11 \\ u_{n+1} = u_n \end{cases}$ 4) $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 10u_n \end{cases}$
- 5) $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = -u_n \end{cases}$ 6) $\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = u_n + 8 \end{cases}$ 7) $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = (-3) \cdot u_n \end{cases}$ 8) $\begin{cases} u_0 = 11 \\ u_{n+1} = -u_n + 2 \end{cases}$
- 9) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ 2u_{n+1} + u_n = 0 \end{cases}$ 10) $\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} - 2 = u_n + 4 \end{cases}$ 11) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = -u_n - 1 \end{cases}$ 12) $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = 7u_n + 2 \end{cases}$
- 13) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ 2u_{n+1} + 3u_n = 5 \end{cases}$ 14) $\begin{cases} u_0 = 8 \\ 6u_{n+1} + 2 = 9u_n + 1 \end{cases}$ 15) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} - 2u_n = 3 \end{cases}$ 16) $\begin{cases} u_0 = 0 \\ 2u_{n+1} - 2u_n = 2 \end{cases}$
-

Réponses : 1) C'est une suite arithmétique. On a $u_n = 5n + 1$

2) C'est une suite géométrique. On a $u_n = 2^n$ 3) C'est une suite constante. On a $u_n = 11$

4) C'est une suite géométrique, mais de premier terme nul, on a donc $u_n = 0 \cdot 10^n = 0$

5) C'est une suite géométrique. On a $u_n = 2 \cdot (-1)^n$ 6) C'est une suite arithmétique. On a $u_n = 8n + 8 = 8(n + 1)$

7) C'est une suite géométrique. On a $u_n = 5 \cdot (-3)^n$

8) C'est une suite arithmético-géométrique. On a $\ell = -\ell + 2 \iff \ell = 1$ Donc $u_n - \ell = (-1)^n(u_0 - \ell)$ Cela donne $u_n = 10 \cdot (-1)^n + 1$

9) $2u_{n+1} + u_n = 0 \iff u_{n+1} = -\frac{1}{2}u_n$. C'est donc une suite géométrique. On a $u_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$

10) $u_{n+1} - 2 = u_n + 4 \iff u_{n+1} = u_n + 6$. C'est donc une suite arithmétique. On a $u_n = 6n + 8$

11) C'est une suite arithmético-géométrique. On a $\ell = -\ell - 1 \iff \ell = -\frac{1}{2}$ Donc $u_n - \ell = (-1)^n(u_0 - \ell)$

Cela donne $u_n = \frac{3 \cdot (-1)^n - 1}{2}$

12) C'est une suite arithmético-géométrique. On a $\ell = 7\ell + 2 \iff \ell = -\frac{1}{3}$ Donc $u_n - \ell = 7^n(u_0 - \ell)$ Cela

donne $u_n = \frac{7^n - 1}{3}$

13) $2u_{n+1} + 3u_n = 5 \iff u_{n+1} = \frac{-3}{2} + \frac{5}{2}$. C'est encore une suite arithmético-géométrique. On a

$2\ell + 3\ell = 5 \iff \ell = 1$ Donc $u_n - \ell = \left(\frac{-3}{2}\right)^n(u_0 - \ell) = 0$ car $u_0 = \ell = 1$. Cela donne $u_n = 1$. La suite est constante.

14) $6u_{n+1} + 2 = 9u_n + 1 \iff u_{n+1} = \frac{3}{2}u_n - 1$ C'est une suite arithmético-géométrique.

On a $6\ell + 2 = 9\ell + 1 \iff \ell = \frac{1}{3}$ Donc $u_n - \ell = \left(\frac{3}{2}\right)^n(u_0 - \ell)$. Cela donne $u_n = \frac{23 \cdot 3^n + 2^n}{3 \cdot 2^n}$.

15) $u_{n+1} - 2u_n = 3 \iff u_{n+1} = 2u_n + 3$ C'est une suite arithmético-géométrique.

On a $\ell - 2\ell = 3 \iff \ell = -3$ Donc $u_n - \ell = 2^n(u_0 - \ell)$. Cela donne $u_n = 2^{n+2} - 3$.

16) $2u_{n+1} - 2u_n = 2 \iff u_{n+1} = u_n + 1$ C'est une suite arithmétique. On a $u_n = n$.

Exercice 10 : En vous ramenant à des suites usuelles, calculer le terme général des suites suivantes définies par récurrence :

- 1) $\begin{cases} u_0 = -1 \\ u_{n+1} = 2|u_n| \end{cases}$ 2) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = (-1)^n u_n \end{cases}$ 3) $\begin{cases} u_0 = 8 \\ u_{n+1} = (-2)^n u_n \end{cases}$ 4) $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = u_n^2 \end{cases}$

$$\begin{array}{lll}
5) \left\{ \begin{array}{l} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = 3\sqrt{u_n} \end{array} \right. & 6) \left\{ \begin{array}{l} u_0 = \frac{3}{5} \\ u_{n+1} = \lfloor 2u_n \rfloor + \frac{3}{5} \end{array} \right. & 7) \left\{ \begin{array}{l} u_0 = \frac{\pi}{2} \\ u_{n+1} = \frac{\pi}{2} \cdot \cos(u_n) \end{array} \right. \\
8) \left\{ \begin{array}{l} u_0 = a \in \mathbb{R}, u_1 = b \in \mathbb{R} \\ u_{n+1} = \frac{u_n + u_{n+2}}{2} \end{array} \right. & \text{(On se ramènera à une suite arithmétique)} & \\
\ldots & &
\end{array}$$

Réponses : 1) On remarque que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2|u_n| \geq 0$ Donc $u_n \geq 0$ pour $n \geq 1$. On obtient : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = 2|u_n| = 2u_n$ et donc u_n est une suite géométrique à partir du rang 1. On a $u_n = 2^{n-1}u_1$.

Par ailleurs $u_1 = |u_0| = 1$. Conclusion :
$$u_n = \begin{cases} -1 & \text{si } n = 0 \\ 2^{n-1} & \text{sinon} \end{cases}$$

2) Méthode simple : $u_n = (-1)^{n-1}u_{n-1} = (-1)^{n-1} \cdot (-1)^{n-2}u_{n-2} = \dots = (-1)^{(n-1)+\dots+1+0}u_0 = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

Donc
$$u_n = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$$
 On va s'intéresser aux termes pairs et impairs.

Autre méthode : On a $u_{2n} = (-1)^{2n}u_{2n-1} = u_{2n-1} = (-1)^{2n-1}u_{2n-2} = -u_{2n-2}$. Donc la suite (u_{2n}) est géométrique de raison -1 et de premier terme u_0 . On en déduit $u_{2n} = (-1)^n u_0 = (-1)^n$.

On a calculé tous les termes pairs de la suite, on fait pareil pour les termes impairs : on a $(u_{2n+1})_n$ une suite géométrique de premier terme u_1 donc $u_{2n+1} = (-1)^n u_1 = (-1)^n \cdot -u_0 = (-1)^{n+1}$. Conclusion :

$$u_n = \begin{cases} (-1)^p & \text{si } n = 2p \\ (-1)^{p+1} & \text{si } n = 2p + 1 \end{cases} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \quad (\text{il suffit de vérifier que cela correspond bien})$$

3) Méthode simple, comme la précédente,
$$u_n = 8 \cdot (-2)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

4) On passe au $\ln$: on a $\ln u_{n+1} = 2 \ln u_n$ Donc $(\ln u_n)_n$ est une suite géométrique de raison 2. On trouve $\ln u_n = \ln u_0 \cdot 2^n = \ln 3 \cdot 2^n$ donc en passant à l'exponentielle, on trouve
$$u_n = 3^{2^n}.$$

5) On fait pareil que le précédent. Déjà on remarque par récurrence immédiate que $u_n \geq 0$ pour tout n donc la relation $u_{n+1} = \sqrt{u_n}$ est bien définie. On a $u_{n+1} = 3\sqrt{u_n} \iff \ln u_{n+1} = \frac{1}{2} \ln u_n + \ln 3$. La suite $(\ln u_n)$ est donc arithmético géométrique. On a $\ell = \frac{1}{2} \ell + \ln 3 \iff \ell = 2 \ln 3$ Donc $\ln u_n - \ell = \frac{\ln u_0 - \ell}{2^n}$.

Cela donne $\ln u_n = \frac{\ln 2 - \ln 3}{2^{n-1}} + 2 \ln 3$ donc $u_n = \exp\left(\frac{1}{2^{n-1}}(\ln 2 - \ln 3) + 2 \ln 3\right)$ en simplifiant, on trouve

$$\text{en conclusion : } u_n = 9 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{1}{2^{n-1}}}.$$

6) L'objectif ici c'est de simplifier la relation de récurrence. On va donc chercher comment exprimer $\lfloor 2u_n \rfloor$ de manière plus simple en fonction de u_n :

$$\text{On a } \lfloor 2u_n \rfloor = \left\lfloor 2\lfloor 2u_{n-1} \rfloor + \frac{6}{5} \right\rfloor = \left\lfloor \underbrace{2\lfloor 2u_{n-1} \rfloor + 1}_{\in \mathbb{N}} + \frac{1}{5} \right\rfloor = 2\lfloor 2u_{n-1} \rfloor + 1 + \left\lfloor \frac{1}{5} \right\rfloor = 2\lfloor 2u_{n-1} \rfloor + 1$$

(Rappel : si $n \in \mathbb{N}$, on a $\lfloor x + n \rfloor = \lfloor x \rfloor + n$). Donc $\lfloor 2u_n \rfloor = 2\lfloor 2u_{n-1} \rfloor + 1 = 2\left(u_n - \frac{3}{5}\right) + 1 = 2u_n - \frac{1}{5}$.

Finalement on trouve $u_{n+1} = \lfloor 2u_n \rfloor + \frac{3}{5} \iff u_{n+1} = 2u_n - \frac{1}{5} + \frac{3}{5} = 2u_n + \frac{2}{5}$. C'est une suite arithmético géométrique.

$$\ell = 2\ell + \frac{2}{5} \iff \ell = \frac{-2}{5} \text{ donc } u_n - \ell = 2^n(u_0 - \ell) \text{ cela donne } u_n = 2^n - \frac{2}{5}$$

7) Si on calcule les premiers termes, on se rend compte que c'est répétitif. $u_0 = \frac{\pi}{2}$, puis $u_1 = 0$, puis $u_2 = \frac{\pi}{2}$, puis $u_3 = 0$ etc... On démontre cela par récurrence : $\mathcal{P}(n)$: " $u_{2n} = \frac{\pi}{2}$ et $u_{2n+1} = 0$ ".

En calculant les premiers termes, on a montré l'initialisation. Par ailleurs si c'est vrai au rang n , c'est facilement vérifiable au rang $n+1$: $u_{2n+2} = \frac{\pi}{2} \cos u_{2n+1} = \frac{\pi}{2} \cos 0 = \frac{\pi}{2}$ et $u_{2n+3} = \frac{\pi}{2} \cos u_{2n+2} = \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} = 0$

donc c'est vrai au rang $n + 1$. Finalement :
$$u_n = \begin{cases} \frac{\pi}{2} \text{ si } n = 2p \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} = (1 + (-1)^n) \frac{\pi}{4}$$

8) Remarque : comme cette suite est récurrente d'ordre 2, on pourrait la résoudre comme telle. Dans notre cas il y a plus simple.

On a $u_{n+1} = \frac{u_n + u_{n+2}}{2} \iff 2u_{n+1} = u_n + u_{n+2} \iff u_{n+2} - u_{n+1} = u_{n+1} - u_n$ La suite $(u_{n+1} - u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc constante $u_{n+1} - u_n = u_1 - u_0 = b - a$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = (b - a) + u_n$. C'est donc une suite arithmétique. On trouve $u_n = n(b - a) + a$.

Exercice 11 : (Récurrence d'ordre 2) Calculer le terme général des suites suivantes définies par récurrence :

- 1) $\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+2} + 2u_{n+1} = 3u_n \end{cases}$ 2) $\begin{cases} u_0 = 1, u_1 = 3 \\ 3u_{n+2} - 6u_{n+1} + 3u_n = 0 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} u_0 = u_1 = 1 \\ u_{n+2} = -2u_n \end{cases}$
- 4) $\begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 1 \\ u_n = u_{n+1} + u_{n-1} \text{ pour } n \geq 1 \end{cases}$
-

Réponses : 1) On pose l'équation caractéristique $r^2 + 2r - 3 = 0$. On résout : $\Delta = 4 + 12 = 16$ donc $r_1 = \frac{-2+4}{2} = 1$ et $r_2 = \frac{-2-4}{2} = -3$. Donc $u_n = A + B3^n$. On résout le système avec les conditions initiales : $\begin{cases} A + B = 1 \\ A - 3B = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 4B = 0 \\ A - 3B = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} B = 0 \\ A = 1 \end{cases}$

Donc la suite est constante on a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 1$.

Remarque : par unicité de la solution, si on avait remarqué tout de suite que la suite constante égale à 1 fonctionne, on aurait pu conclure directement.

2) Déjà, on simplifie par 3 le bazar. $3u_{n+2} - 6u_{n+1} + 3u_n = 0 \iff u_{n+2} - 2u_{n+1} + u_n = 0$. Cela donne l'équation caractéristique $r^2 - 2r + 1 = 0 \iff (r - 1)^2 = 0$ donc ça donne une racine simple. Les solutions de cette équation sont de la forme $u_n = (A + Bn)$. Avec les conditions initiales on trouve $A = u_0 = 1$ et $1 + B = 3 \implies B = 2$. On a donc $u_n = 1 + 2n$.

Remarque : ce problème est exactement le même que celui de la question 8) de l'exercice précédent.

3) On a l'équation caractéristique $r^2 + 2 = 0$ dont les racines complexes sont $\sqrt{2}i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ et $-\sqrt{2}i$, donc $u_n = A \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\sqrt{2}^n + B \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\sqrt{2}^n$.

Les conditions initiales donnent : $\begin{cases} A \cos 0 + B \sin 0 = 1 \\ A \cos \frac{\pi}{2} \sqrt{2} + B \sin \frac{\pi}{2} \sqrt{2} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 1 \\ \sqrt{2}B = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 1 \\ B = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$

Finalement $u_n = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\sqrt{2}^n + \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\sqrt{2}^{n-1}$

4) L'équation caractéristique associée est $r^2 - r + 1 = 0$ Donc $\Delta = -3 < 0$ Les racines sont $z = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ et $\bar{z}$. On a $z = e^{i\frac{\pi}{3}}$. Donc $u_n = A \cos \frac{n\pi}{3} + B \sin \frac{n\pi}{3}$.

Les conditions initiales donnent : $\begin{cases} A \cos 0 + B \sin 0 = 0 \\ A \cos \frac{\pi}{3} + B \sin \frac{\pi}{3} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 0 \\ \frac{1}{2}B = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = 0 \\ B = 2 \end{cases}$

Finalement $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2 \sin \frac{n\pi}{3}$

Exercice 12 : (Récurrence d'ordre 2 particulières) Calculer le terme général des suites suivantes définies par récurrence :

$$1) \begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 1 \\ 2u_{n+2} + 5u_{n+1} - 3u_n = 1 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} u_0 = 0, u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n + n \end{cases}$$

Réponses : 1) On résout $2l + 5l - 3l = 1 \iff 4l = 1 \iff l = \frac{1}{4}$. En faisant $L_1 - L_2$ on trouve donc : $2(u_{n+2} - l) + 5(u_{n+1} - l) - 3(u_n - l) = 0$ La suite $v_n = u_n - l$ vérifie donc une équation de récurrence d'ordre 2 qu'on peut résoudre.

L'équation caractéristique est $2r^2 + 5r - 3 = 0$. On a $\Delta = 25 + 24 = 49$ donc

$$r_1 = \frac{-5+7}{4} = \frac{1}{2} \text{ et } r_2 = \frac{-5-7}{4} = -3. \text{ Donc } v_n = \frac{A}{2^n} + (-3)^n B \text{ Les conditions initiales donnent :}$$

$$\begin{cases} A + B = v_0 = u_0 - \frac{1}{4} \\ \frac{A}{2} - 3B = v_1 = u_1 - \frac{1}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} A + B = -\frac{1}{4} \\ \frac{A}{2} - 3B = \frac{3}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} A + B = -\frac{1}{4} \\ A - 6B = \frac{3}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} A + B = -\frac{1}{4} \\ -7B = \frac{7}{4} \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} A = -B - \frac{1}{4} = 0 \\ B = -\frac{1}{4} \end{cases}$$

On trouve donc $v_n = -\frac{(-3)^n}{4} = u_n - \frac{1}{4}$ donc finalement $\forall n \in \mathbb{N}, \boxed{u_n = 1 + \frac{1 - (-3)^n}{4}}$

2) On aimerait appliquer la même méthode, mais il ne semble pas y avoir de suite évidente qui vérifie l'équation... On doit se débrouiller pour faire apparaître une relation de récurrence plus simple. On peut essayer plusieurs pistes. Notamment on peut remarquer :

$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 4u_n + n \iff u_{n+2} - u_{n+1} = 4(u_{n+1} - u_n) + n$. Donc si on pose $v_n = u_{n+1} - u_n$ alors on a une relation plus simple que vérifie $v_n : \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 4v_n + n$.

Cependant, cela reste une suite non usuelle. On peut chercher une solution simple à cette équation, par analyse synthétique. Une suite de la forme $v_n = an + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ pourrait bien faire l'affaire. On va chercher a et b On aurait alors :

$$v_{n+1} = 4v_n + n \iff a(n+1) + b = 4an + 4b + n \iff an + a + b = (4a+1)n + 4b \iff (3a+1)n + a - 3b = 0.$$

$$\text{On veut donc avoir } \begin{cases} 3a+1=0 \\ a-3b=0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -\frac{1}{3} \\ b = -\frac{1}{9} \end{cases} \text{ Donc on obtient une solution qu'on va nommer}$$

$x_n = \frac{-n}{3} + \frac{-1}{9}$. On peut facilement vérifier que x_n est solution de l'équation, mais est-ce la seule ?

Probablement pas d'ailleurs x_n ne satisfait pas nos conditions initiales. Posons $w_n = v_n - x_n$. On a alors : $w_{n+1} = v_{n+1} - x_{n+1} = 4v_n + n - 4x_n - \frac{1}{9} = 4w_n$. Donc $(w_n)_n$ est une suite géométrique de raison 4 !

$$\text{On a } w_n = 4^n w_0 = 4^n (v_0 - x_0) = 4^n \left(1 + \frac{1}{9}\right) = \frac{5 \cdot 2^{2n+1}}{9} \text{ et } v_n = w_n + x_n = \frac{5 \cdot 2^{2n+1} - 3n - 1}{9}$$

Dès lors on peut retrouver u_n , en effet, on a $u_{n+1} = v_n + u_n = v_n + v_{n-1} + u_{n-1} = v_n + v_{n-1} + \dots + v_0 + u_0$

$$\text{Bref } u_{n+1} = u_0 + \sum_{k=0}^n v_k = 0 + \sum_{k=0}^n \frac{5 \cdot 2^{2k+1} - 3k - 1}{9} = \frac{10}{9} \frac{(1 - 4^{n+1})}{1 - 4} - \frac{n(n+1)}{6} - \frac{n+1}{9}$$

$$\text{Conclusion : } \boxed{u_n = \frac{20(4^n - 1) - 3n(3n - 1)}{54}} \text{ (on peut vérifier qu'on a bien } u_0 = 0 \text{ et } u_1 = 1)$$

Exercice 13 : On définit par récurrence la suite $(u_n)_n : u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 3u_n + 2 - 2n$

1) Calculer les cinq premiers termes de la suite u_n . 2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq n$

3) En déduire que la suite u_n est croissante.

4) On pose $v_n = u_n - n$. Montrer que v_n est une suite arithmético-géométrique.

5) En déduire le terme général de v_n , puis celui de u_n

Réponses : 1) $u_0 = 0, u_1 = 3u_0 + 2 - 2 \cdot 0 = 2, u_2 = 6, u_3 = 16, u_4 = 44$

2) On le montre par récurrence : On a bien $u_0 = 0 \geq 0$. Par ailleurs si au rang n on a $u_n \geq n$, alors on a $u_{n+1} \geq 3n + 2 - 2n \geq n + 2 \geq n$. Donc la propriété est vérifiée au rang $n + 1$. Le résultat est donc vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) On a $u_{n+1} - u_n = 2u_n + 2 - 2n \geq 2 > 0$. Donc $\forall n \in \mathbb{N}$ on a $u_{n+1} > u_n$ et la suite u_n est strictement croissante.

4) On a $v_{n+1} = u_{n+1} - (n + 1) = 3u_n + 2 - 2n - n - 1 = 3(u_n - n) + 1 = 3v_n + 1$. Donc $v_{n+1} = 3v_n + 1$ est une suite arithmético-géométrique.

5) On résout $\ell = 3\ell + 1$, cela donne $\ell = \frac{-1}{2}$. On a donc $v_n - \ell = 3^n(v_0 - \ell)$ avec $v_0 = u_0 - 0 = 0$.

Donc $v_n = -3^n\ell + \ell = \frac{3^n - 1}{2}$. Finalement, $u_n = v_n + n$ donc $u_n = \frac{3^n - 1}{2} + n$.

Exercice 14 : On définit par récurrence la suite $(u_n)_n$: $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{2u_n + 4}$.

1) Montrer que la suite est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \frac{2u_n - 1}{u_n + 1}$. Justifier que la suite v est bien définie.

3) Trouver une relation de récurrence que vérifie la suite v , en déduire les valeurs de v_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

4) En déduire l'expression du terme général u_n en fonction de n .

Réponses : 1) On a par récurrence immédiate $u_n \geq 0$ en effet $u_0 \geq 0$ et si $u_n \geq 0$ alors $3u_n + 1 > 0$ et $2u_n + 4 > 0$ donc u_{n+1} est bien défini et $u_{n+1} \geq 0$.

2) De même on a $u_n \geq 0$ qui donne $u_n + 1 > 0$ donc v_n est bien défini.

3) On a $v_{n+1} = \frac{2u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 1} = \frac{2\frac{3u_n + 1}{2u_n + 4} - 1}{\frac{3u_n + 1}{2u_n + 4} + 1} = \frac{6u_n + 2 - 2u_n - 4}{3u_n + 1 + 2u_n + 4} = \frac{4u_n - 2}{5u_n + 5} = \frac{2}{5}v_n$ en conclusion $v_{n+1} = \frac{2}{5}v_n$.

$(v_n)_n$ est géométrique donc $v_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n v_0$ cela donne $v_n = -\left(\frac{2}{5}\right)^n$ car $v_0 = \frac{2u_0 - 1}{u_0 + 1} = -1$.

4) On a $v_n = \frac{2u_n - 1}{u_n + 1} \iff (u_n + 1)v_n = 2u_n - 1 \iff u_n(v_n - 2) = -v_n - 1 \iff u_n = \frac{v_n + 1}{2 - v_n} \iff$

$$u_n = \frac{1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n}{2 + \left(\frac{2}{5}\right)^n} = \frac{5^n - 2^n}{2 \cdot 5^n + 2^n}$$

Exercice 15 : On définit par récurrence les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 0 \end{cases}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = 2u_n + v_n \end{cases}$.

1) Calculer les trois premiers termes des suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$.

2) Montrer que les deux suites sont positives. Quelle est leur monotonie ?

3) Montrer que la suite $(u_n + v_n)_n$ est géométrique et la calculer.

4) Montrer que la suite $(u_n - v_n)_n$ est géométrique et la calculer.

5) En déduire le terme général de $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$.

Réponses : 1) $u_0 = 1, v_0 = 0, u_1 = 1, v_1 = 2, u_2 = 5, v_2 = 4$

2) On montre par récurrence que $u_n \geq 0$ et $v_n \geq 0$ pour tout n , la récurrence est assez immédiate : Si c'est vrai au rang n alors $u_{n+1} = u_n + 2v_n \geq 0$. De même pour v_{n+1} .

On a $u_{n+1} - u_n = 2v_n \geq 0$ donc la suite est croissante. Pareil pour v_n .

3) On a $u_{n+1} + v_{n+1} = 3(u_n + v_n)$ en additionnant les deux lignes du système. Donc c'est une suite géométrique de raison 3. On obtient $u_n + v_n = 3^n \cdot (u_0 + v_0) = 3^n$.

4) On a $u_{n+1} - v_{n+1} = -u_n + v_n = (-1) \cdot (u_n - v_n)$. C'est une suite géométrique de raison -1 . On obtient $u_n - v_n = (-1)^n \cdot (u_0 - v_0) = (-1)^n$.

5) On résout le système suivant : $\begin{cases} u_n + v_n = 3^n \\ u_n - v_n = (-1)^n \end{cases}$. On trouve $u_n = \frac{3^n + (-1)^n}{2}$ et $v_n = \frac{3^n - (-1)^n}{2}$.

Exercice 16 : On définit par récurrence les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = 4u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = u_n + 5v_n \end{cases}$$

Calculer les termes généraux u_n et v_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$

.....
 Réponses : On a $u_{n+1} - v_{n+1} = 3u_n - 3v_n = 3(u_n - v_n)$ donc c'est une suite géométrique de raison 3. On a $u_n - v_n = 3^n(u_0 - v_0)$ donc $\boxed{u_n - v_n = 3^n}$.

Il faudrait trouver une autre relation $au_{n+1} - bv_{n+1} = q(au_n + bv_n)$. Avec $a, b, q \in \mathbb{R}$. Pour simplifier, fixons

$$a = 1. \quad u_{n+1} + bv_{n+1} = q(u_n + bv_n) \iff (4+b)u_n + (2+5b)v_n = qu_n + qbv_n \iff \begin{cases} 4+b = q \\ 2+5b = qb \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} b = q - 4 \\ 2 + 5q - 20 = q^2 - 4q \end{cases} \iff \begin{cases} b = q - 4 \\ q^2 - 9q + 18 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = q - 4 \\ (q-3)(q-6) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b = -1 \\ q = 3 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} b = 2 \\ q = 6 \end{cases}$$

On a déjà celle avec $b = -1$ donc reste à vérifier celle où $b = 2$: On a $u_{n+1} + 2v_{n+1} = 6u_n + 12v_n = 6(u_n + 2v_n)$

donc $(u_n + 2v_n)_n$ est géométrique de raison 6 et on a $\boxed{u_n + 2v_n = 6^n}$

Finalement $3v_n = (u_n + 2v_n) - (u_n - v_n)$ donc $\boxed{v_n = \frac{3^n - 6^n}{3}}$

Et $3u_n = (u_n + 2v_n) + 2(u_n - v_n)$ donc $\boxed{u_n = \frac{3^n + 2 \cdot 6^n}{3}}$
