

TD8 - Equations différentielles

1BCPST 2

Feuille d'exercice

Année 2022- 2023

Equations d'ordre 1

Exercice 1 : ♡ (1 minute) Résoudre les equations différentielles suivantes :

- 1) $\begin{cases} y' = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y' = \ln x \\ y(2) = 1 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y' + \arctan(x)y = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y' = 2y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} y' = y + 3 \\ y(0) = 0 \end{cases}$
- 6) $\begin{cases} y' = 2xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$ 7) $\begin{cases} y'' = y' \\ y(0) = 0 \text{ et } y'(0) = 1 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} xy' + y = 2 \\ y(1) = 0 \end{cases}$ 9) $\begin{cases} y' + y = e^x \\ y(0) = 0 \end{cases}$

Exercice 2 : ★ - ★★ Résoudre les equations différentielles suivantes :

- 1) $\begin{cases} y' + (\tan x)y = \cos^2 x \\ y(0) = 1 \end{cases}$ sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ 2) $\begin{cases} xy' + y = \tan x \\ y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0 \end{cases}$ sur $\left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$
- 3) $\begin{cases} y' = |x|y + 1 \\ y(1) = 1 \end{cases}$ 4) Si $a, b \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} y' = ay + e^{bx} \\ y(0) = 0 \end{cases}$

Exercice 3 : ★★ Trouver les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ qui vérifient : $\forall x \in \mathbb{R}, \int_0^x (2x - 3t)f(t) dt = \frac{x^2}{2}$

Exercice 4 : ★ Soit l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}_+^*$ (E) : $x^2 y' - y = x^2 - x + 1$.

On note F une primitive de la fonction $f : x \mapsto \left(1 - \frac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}$

- 1) Exprimer une solution de (E) en fonction de F .
2) Trouver une fonction de la forme $y(x) = ax + b$ solution de (E).
3) En déduire une valeur explicite de F en fonction de x et résoudre (E) .

Equations d'ordre 2

Exercice 5 : ♡ (2 minutes) Résoudre les equations différentielles suivantes :

- 1) $\begin{cases} y'' = 3 \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y'' = \frac{1}{x} \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} xy'' = y' \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases}$
- 5) $\begin{cases} y'' - 2y = 2 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$ 6) $\begin{cases} y'' + y' = 1 \\ y(0) = 0 \text{ et } y'(0) = 1 \end{cases}$ 7) $\begin{cases} y'' + 2y' + y = 0 \\ y(0) = y'(0) = 2 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 2 \\ y(0) = 0 \text{ et } y'(0) = 0 \end{cases}$
- 9) $\begin{cases} y'' + 2y' + 2 = 1 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$ 10) $\begin{cases} 4y'' + 6y' + 5y = 2y' + y \\ y(0) = 0 \text{ et } y'(0) = 1 \end{cases}$ 11) $\begin{cases} y'' = y' + y + 1 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$

Exercice 6 : (Avec second membre non constant ★) Résoudre les equations différentielles suivantes :

- 1) $\begin{cases} y'' - 5y' + 6 = \sin x \\ y(0) = 0 \text{ et } y'(0) = 1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y'' - y = \cos^2 x \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y'' + y' + y = x^2 + 2x + 3 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$
- 4) $\begin{cases} y'' - 2y' - 3y = 4e^{3x} + 1 \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$

Indications : Pour la 1) et 2) on cherchera une solution particulière sous la forme $A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$ avec ω bien choisi

Pour la 3) On cherchera une solution particulière sous la forme $ax^2 + bx + c$

Pour la 4) on cherchera une solution particulière sous la forme $(ax + b)e^{3x}$

Exercice 7 : ★★ Trouver les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ qui vérifient : $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = f(-x)$

Equations non linéaires

Exercice 8 : ★★ - ★★★ Résoudre les equations différentielles suivantes :

- 1) $\begin{cases} 3y + y'y = 2xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} yy' = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} (1 + 2y)y' = 2x \\ y(0) = 0 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} y'2^y = 5 \\ y(0) = 1 \end{cases}$
- 6) $\begin{cases} y''y + y'^2 = e^x \\ y(0) = 0 \text{ et } y(1) = 1 \end{cases}$ 7) $\begin{cases} 2 \ln(y') = 3x - \ln(y) \\ y(0) = 1 \end{cases}$ 8) $\begin{cases} y' = |y + 1| \\ y(0) = 0 \end{cases}$ 9) $\begin{cases} y' = \max(y, 1) \\ y(0) = 0 \end{cases}$

Exercice 9 : (*Changement d'inconnue* ★★)

1) Résoudre l'équation différentielle $y' = y \ln y$ en posant $y(t) = e^{z(t)}$

2) Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle :

$$(E) : \quad x^2 y'' + 4xy' - (x^2 - 2)y = 0$$

On pourra poser z tel que $\forall x > 0$, $z(x) = x^2 y(x)$.

3) Résoudre sur $]0, 1[$ l'équation différentielle :

$$x(1 - x)y'' + (1 - 3x)y' - y = 0$$

On pourra poser z tel que $\forall x > 0$, $y(x) = \frac{z(x)}{1 - x}$.

Exercice 10 : (*Systèmes d'équations différentielles* ★★ - ★★★)

Résoudre les équations différentielles suivantes :

- 1) $\begin{cases} y' = y + 2z + 1 \\ z' = 2y + z + 2 \\ y(0) = z(0) = 0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y' = 2y + z \\ z'' = y' \\ y(0) = z(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \text{ et } z'(0) = 1 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y'' = 3z' + 4y \\ z'' = 3y' + 4z \\ y(0) = z(0) = 1 \\ y'(0) = z'(0) = 0 \end{cases}$
- 4) $\begin{cases} 5xy' = (3x^2 + 2)y + 6(x^2 - 1)z \\ 5xz' = (x^2 - 1)y + (2x^2 + 3)z \\ y(0) = z(0) = 1 \end{cases}$

Exercice 11 : (*ordre supérieur* ★★ - ★★★) Résoudre les équations différentielles suivantes :

- 1) $\begin{cases} y''' - 2y'' + y' - 2y = -2 \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y'''' = 2y'' - y \\ y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 \\ y'''(0) = 1 \end{cases}$