TD8 - Equations différentielles
Corrigé

1BCPST 2 — Feuille d'exercice — Année 2022- 2023

Equations d'ordre 1

Exercice 1 : *(En 2 minutes)* Résoudre les equations différentielles suivantes :

1) $\begin{cases} y'=0 \\ y(0)=1 \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} y'=\ln x \\ y(2)=1 \end{cases}$ **3)** $\begin{cases} y'+\arctan(x)y=0 \\ y(0)=0 \end{cases}$ **4)** $\begin{cases} y'=2y \\ y(0)=1 \end{cases}$ **5)** $\begin{cases} y'=y+3 \\ y(0)=0 \end{cases}$

6) $\begin{cases} y'=2xy \\ y(0)=1 \end{cases}$ **7)** $\begin{cases} y''=y' \\ y(0)=0 \text{ et } y'(0)=1 \end{cases}$ **8)** $\begin{cases} xy'+y=2 \\ y(1)=0 \end{cases}$ **9)** $\begin{cases} y'+y=e^x \\ y(0)=0 \end{cases}$

. . . .

Réponses : **1)** $\forall x\in\mathbb{R}$, $\boxed{y(x)=1}$ **2)** $\forall x\in\mathbb{R}$, $\boxed{y(x)=x\ln x-x-2\ln 2+3}$

3) 0 est solution et d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz la solution est unique donc $\forall x\in\mathbb{R}$, , $\boxed{y(x)=0}$

4) $\forall x\in\mathbb{R}$, $\boxed{y(x)=e^{2x}}$ **5)** $\forall x\in\mathbb{R}$, $\boxed{y(x)=3e^x-3}$ **6)** $\forall x\in\mathbb{R}$, $\boxed{y(x)=e^{x^2}}$

7) $\forall x\in\mathbb{R}$, $\boxed{y(x)=e^x-1}$ **8)** $\forall x\in\mathbb{R}_+^*$, $\boxed{y(x)=\frac{-2}{x}+2}$ **9)** $\forall x\in\mathbb{R}$, $\boxed{y(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}}$

Exercice 2 : *(Équations d'ordre 1)* Résoudre les equations différentielles suivantes :

1) $\begin{cases} y'+(\tan x)y=\cos^2 x \\ y(0)=1 \end{cases}$ sur $\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ **2)** $\begin{cases} xy'+y=\tan x \\ y\left(\frac{\pi}{4}\right)=0 \end{cases}$ sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$

3) $\begin{cases} y'=|x|y+1 \\ y(1)=1 \end{cases}$ **4)** Si $a,b\in\mathbb{R}$: $\begin{cases} y'=ay+e^{bx} \\ y(0)=0 \end{cases}$

. . . .

Réponses : **1)** Déjà disons que les fonctions $x\mapsto\tan x$ et $x\mapsto\cos^2 x$ sont continues sur $\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. La solution existe donc est est unique d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz. Résolvons déjà l'équation homogène : $y'+(\tan x)y=0$.

La solution est $y_H(x)=\lambda e^{\ln|\cos x|}=\lambda\cos(x)$ pour $x\in\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$. Ensuite faisons la variation de la constante en posant $y_p(x)=\lambda(x)\cos x$.
On a $y_p'+(\tan x)y_p=\cos^2 x \iff \lambda'(x)\cos(x)=\cos^2(x) \iff \lambda'(x)=\cos(x)$.
On peut donc choisir $\lambda(x)=\sin(x)$ et on trouve $y_p(x)=\sin x\cos x$

Finalement $y(x)=y_H(x)+y_p(x)=\lambda\cos x+\sin x\cos x=\cos x(\lambda+\sin x)$.
La condition initiale $y(0)=1$ donne $\lambda=1$. D'où : $\forall x\in\left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$, $\boxed{y(x)=\cos x(1+\sin x)}$

2) Déjà disons que les fonctions $x\mapsto\frac{1}{x}$ et $x\mapsto\frac{\tan x}{x}$ sont continues sur $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$. La solution existe donc est est unique d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz.
Résolvons l'équation homogène : $xy'+y=0 \iff y'=-\frac{1}{x}y$. La solution est $y_H(x)=\lambda e^{-\ln|x|}=\frac{\lambda}{|x|}=\frac{\lambda}{x}$ car $x>0$.
Ensuite faisons la variation de la constante en posant $y_p(x)=\frac{\lambda(x)}{x}$.
On a $xy_p'+y_p=\tan x \iff \frac{\lambda'(x)}{x}=\frac{\tan x}{x} \iff \lambda'(x)=\tan(x)$.

On peut donc choisir $\lambda(x) = \ln(\cos x)$ et on trouve $y_p(x) = \dfrac{\ln(\cos x)}{x}$

Finalement $y(x) = y_H(x) + y_p(x) = \dfrac{\lambda + \ln\cos x}{x}$.

La condition initiale $y\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$ donne $\lambda = \dfrac{1}{2}\ln 2 = \ln\sqrt{2}$. D'où : $\forall x \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, $\boxed{y(x) = \dfrac{\ln(\sqrt{2}\cos x)}{x}}$

3) Les fonctions $x \mapsto |x|$ et $x \mapsto x$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et donc l'equation différentielle admet une unique solution sur $\mathbb{R}$. Résolvons sur $\mathbb{R}_+$, puis sur $\mathbb{R}-$:

$\boxed{\text{Sur } \mathbb{R}_+}$ On a $y' = xy + x$ Donc $y_H(x) = \lambda e^{\frac{x^2}{2}}$ et $y_p(x) = -1$ est une solution particulière évidente.

Donc $y(x) = \lambda e^{\frac{x^2}{2}} - 1$ sur $\mathbb{R}_+$.

$\boxed{\text{Sur } \mathbb{R}_-}$ On a $y' = -xy + x$ Donc $y_H(x) = \mu e^{\frac{-x^2}{2}}$ et $y_p(x) = 1$ est une solution particulière évidente. Donc $y(x) = \mu e^{-\frac{x^2}{2}} + 1$ sur $\mathbb{R}_-$.

Pour que la fonction soit valable sur $\mathbb{R}$, il faut pouvoir la relier en 0 pour qu'elle soit continue. On a $y(0) = \mu + 1 = \lambda - 1$ On en déduit $\mu = \lambda - 2$.

Par ailleurs la condition initiale $y(1) = 1$ donne $\lambda - 1 = 1 \iff \lambda = 2$. Finalement $\boxed{y(x) = \begin{cases} 2e^{\frac{x^2}{2}} - 1 \text{ si } x \geq 0 \\ 1 \text{ si } x \leq 0 \end{cases}}$

4) Si $a, b \in \mathbb{R}$: $\begin{cases} y' = ay + e^{bx} \\ y(0) = 0 \end{cases}$

Les fonctions $x \mapsto a$ et $x \mapsto e^{bx}$ sont continues sur $\mathbb{R}$ et donc l'équation différentielle admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

On a $y_H(x) = \lambda e^{ax}$ et avec variation de la constante, on pose $y_p(x) = \lambda(x)e^{ax}$.

On a alors $\lambda'(x)e^{ax} = e^{bx} \iff \lambda'(x) = e^{(b-a)x}$. On doit distinguer les cas :

$\boxed{\text{Si } a \neq b}$ On peut prendre $\lambda(x) = \dfrac{1}{b-a}e^{(b-a)x}$. On a alors $y_p(x) = \dfrac{1}{b-a}e^{bx}$ et on trouve $y(x) = \lambda e^{ax} + \dfrac{1}{b-a}e^{bx}$.

La condition initiale donne $y(0) = 0 \iff \lambda = -\dfrac{1}{b-a}$ Donc finalement $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{y(x) = \dfrac{e^{bx} - e^{ax}}{b-a}}$

$\boxed{\text{Si } a = b}$ On peut prendre $\lambda(x) = x$. On a alors $y_p(x) = xe^{ax}$ et $y(x) = (\lambda + x)e^{ax}$.

La condition initiale donne $y(0) = 0 \iff \lambda = 0$ Donc finalement $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{y(x) = xe^{ax}}$

Exercice 3 : Trouver les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ qui vérifient : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^x (2x - 3t)f(t)\ \mathrm{d}t = \frac{x^2}{2}$

....

Réponses : On pose $G(x) = \displaystyle\int_0^x (2x - 3t)f(t)\ \mathrm{d}t = 2x\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t - 3\int_0^x tf(t)\ \mathrm{d}t$. G est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on peut calculer sa dérivée, on a :

$G'(x) = 2\displaystyle\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t + 2xf(x) - 3xf(x) = 2\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t - xf(x)$ Mais on sait aussi que $G(x) = \dfrac{x^2}{2}$ donc $G'(x) = x$.

On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t$. On a alors :

$$2\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t + 2xf(x) - 3xf(x) = x \iff 2F(x) - xF'(x) = x \iff F'(x) = \frac{2}{x}F(x) - 1$$

On résout l'équation différentielle $y' = \dfrac{2}{x}y - 1$ en cherchant des solutions continues sur $\mathbb{R}$. Pour cela on va la résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$ qui sont les domaines de continuité de $x \mapsto \dfrac{2}{x}$.

$\boxed{\text{Sur } \mathbb{R}_+^*}$, On a $y_H(x) = \lambda e^{2\ln x} = \lambda x^2$ et $y_p(x) = \lambda(x)x^2$ donne $\lambda(x)'x^2 = -1 \iff \lambda'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$. On peut donc prendre $\lambda(x) = \dfrac{1}{x}$. On a alors $y_p(x) = x$ et donc $y(x) = \lambda x^2 + x$.

$\boxed{\text{Sur } \mathbb{R}_-^*}$, On a $y_H(x) = \mu e^{2\ln -x} = \lambda(-x)^2 = \mu x^2$ Les calculs sont donc les mêmes et on trouve aussi $y(x) = \mu x^2 + x$.

Les solutions sur $\mathbb{R}$ sont donc forcément de la forme $y(x) = \begin{cases} \lambda x^2 + x \text{ si } x \geq 0 \\ \mu x^2 + x \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$.

Par ailleurs, on souhaite qu'elles soient continues et dérivables sur $\mathbb{R}$, il faut donc vérifier en 0. On a bien $y(0) = 0$ les fonctions sont donc continues en 0 et $y'(x) = 2\lambda x \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ ainsi que $y'(x) = 2\mu x \underset{x\to 0^-}{\longrightarrow} 0$.

En conclusion les fonctions solutions sont bien $F(x) = y(x) = \begin{cases} \lambda x^2 + x \text{ si } x \geq 0 \\ \mu x^2 + x \text{ si } x \leq 0 \end{cases}$ avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Nous cherchions les fonctions f. On a $f = F'$ donc $\boxed{f(x) = \begin{cases} \lambda x + 1 \text{ si } x \geq 0 \\ \mu x + 1 \text{ si } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{avec } \lambda, \mu \in \mathbb{R}}$

<u>Exercice 4</u> : Soit l'équation différentielle suivante sur $\mathbb{R}_+^*$ $\quad (E)$: $\qquad x^2y' - y = x^2 - x + 1$.

On note F une primitive de la fonction $f : x \mapsto \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}$

1) Exprimer une solution de (E) en fonction de F.
2) Trouver une fonction de la forme $y(x) = ax + b$ solution de (E).
3) En déduire une valeur explicite de F en fonction de x et résoudre (E) .

. . . .

Réponses : **1)** Sur $\mathbb{R}_+^*$ On résout l'équation homogène : $y' - \dfrac{1}{x^2}y = 0$

On trouve $y_H(x) = \lambda(x)e^{\frac{-1}{x}}$ et par variation de la constante, on a $y_p(x) = \lambda(x)e^{\frac{-1}{x}}$ qui donne $\lambda'(x)e^{\frac{-1}{x}} = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2} \iff \lambda'(x) = \left(1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}} = \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}} + \dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$. On peut donc poser $\lambda(x) = F(x) - e^{\frac{1}{x}}$ et on trouve $y_p(x) = F(x)e^{\frac{-1}{x}} - 1$. Finalement $\forall x > 0$, $\boxed{y(x) = (\lambda + F(x))e^{\frac{-1}{x}} - 1}$

2) On a $y'(x) = a$ donc $x^2y' - y = x^2 - x + 1 \iff ax^2 - ax - b = x^2 - x + 1$ On a donc $a = b = 1$ et $\boxed{y_p(x) = x + 1}$ est solution de (E). **3)** $y_p(x)$ est une solution de (E), d'après la question 1) on a donc $x + 1 = (\lambda + F(x))e^{\frac{-1}{x}} - 1 \iff \lambda + F(x) = (x + 2)e^{\frac{1}{x}}$. Donc $\boxed{F(x) = (x + 2)e^{\frac{1}{x}}}$ est une primitive de $f : x \mapsto \left(1 - \dfrac{1}{x}\right)e^{\frac{1}{x}}$.

Les solutions de (E) sont donc $\forall x > 0$, $\boxed{y(x) = \lambda e^{\frac{-1}{x}} + x + 1}$

Equations d'ordre 2

<u>Exercice 5</u> : *(En 2 minutes)* Résoudre les equations différentielles suivantes :

1) $\begin{cases} y'' = 3 \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases}$ **2)** Sur $\mathbb{R}_+^*$ $\begin{cases} y'' = \dfrac{1}{x} \\ y(0) = y(1) = 0 \end{cases}$ **3)** $\begin{cases} xy'' = y' \\ y(0) = 1 \text{ et } y(1) = 0 \end{cases}$ **4)** $\begin{cases} y'' + y = 0 \\ y(0) = y'(0) = 1 \end{cases}$

5) $\begin{cases} y'' - 2y = 2 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$ **6)** $\begin{cases} y'' + y' = 1 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$ **7)** $\begin{cases} y'' + 2y' + y = 0 \\ y(0) = y'(0) = 2 \end{cases}$ **8)** $\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 2 \\ y(0) = 0 \text{ et } y'(0) = 0 \end{cases}$

9) $\begin{cases} y'' + 2y' + 2 = 1 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$ **10)** $\begin{cases} 4y'' + 6y' + 5y = 2y' + y \\ y(0) = 0 \text{ et } y'(0) = 1 \end{cases}$ **11)** $\begin{cases} y'' = 4y' - 5y + 1 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$

. . . .

Réponses : **1)** $\forall x \in \mathbb{R}$ $\boxed{y(x) = \dfrac{3}{2}x^2 + x + 1}$ **2)** $\forall x > 0$, $\boxed{y(x) = x \ln x}$

3) On résout : $y'' - \dfrac{1}{x}y' = 0$. On trouve $y'(x) = \lambda e^{\ln x} = \lambda x$. Donc $y(x) = \lambda x^2 + \mu$.
Or $y(0) = 1 \implies \mu = 1$ et $y(1) = 0 \implies \lambda + 1 = 0 \implies \lambda = -1$ donc $\boxed{y(x) = 1 - x^2}$

4) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{y(x) = \cos(x) + \sin(x)}$ **5)** $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{y(x) = \dfrac{e^{\sqrt{2}x} + e^{-\sqrt{2}x}}{2} - 1}$ **6)** $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{y(x) = e^{-x} + x - 1}$

7) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{y(x) = (4x+2)e^{-x}}$ **8)** $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{y(x) = -2e^x + e^{2x} + 1}$

9) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{y(x) = \dfrac{\sin(x)e^x - \cos(x)e^x + 1}{2}}$ **10)** $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{y(x) = \dfrac{2}{\sqrt{3}} \sin\left(\dfrac{\sqrt{3}x}{2}\right) e^{\frac{x}{2}}}$

11) $\forall x \in \mathbb{R}$, $\boxed{y(x) = \dfrac{1}{5}(2\sin(x)e^{2x} - \cos(x)e^{2x} + 1)}$

Exercice 6 : *(Avec second membre non constant)* Résoudre les equations différentielles suivantes :

1) $\begin{cases} y'' - 5y' + 6y = \sin x \\ y(0) = 0 \text{ et } y'(0) = 1 \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} y'' - y = \cos^2 x \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$ **3)** $\begin{cases} y'' + y' + y = x^2 + 2x + 3 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$

4) $\begin{cases} y'' - 2y' - 3y = 4e^{3x} + 1 \\ y(0) = y'(0) = 0 \end{cases}$

Indications : Pour la 1) et 2) on cherchera une solution particulière sous la forme $A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)$ *avec* ω *bien choisi*
Pour la 3) On cherchera une solution particulière sous la forme $ax^2 + bx + c$
Pour la 4) on cherchera une solution particulière sous la forme $(ax+b)e^{3x}$

....

1) D'une part les solutions de l'equation homogène : $y'' - 5y' + 6y = 0$ sont $y_H(x) = Ae^{2x} + Be^{3x}$.
Cherchons une solution particulière $y_p(x) = a\cos x + b\sin x$.
On a $y_p'(x) = -a\sin x + b\cos x$ et $y_p''(x) = -a\cos x - b\sin x = -y_p(x)$. donc :
$y_p''(x) - 5y_p'(x) + 6y_p(x) = \sin x \iff 5(y_p(x) - y_p'(x)) = \sin x \iff 5(a+b)\cos x + 5(b-a)\sin x = \sin x$

Il suffit donc d'avoir : $\begin{cases} 5(a+b) = 0 \\ 5(b-a) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} b = -a \\ -10a = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} b = \dfrac{1}{10} \\ a = \dfrac{-1}{10} \end{cases}$ Ainsi $y_p(x) = \dfrac{1}{10}(\sin x - \cos x)$.

Donc $y(x) = Ae^{2x} + Be^{3x} + \dfrac{1}{10}(\sin x - \cos x)$. et les conditions initiales donnent : $y(0) = 0 \iff A + B - \dfrac{1}{10} = 0$ et $y'(0) = 1 \iff 2A + 3B + \dfrac{1}{10} = 1$.

$$\begin{cases} A + B - \dfrac{1}{10} = 0 \\ 2A + 3B + \dfrac{1}{10} = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A + B - \dfrac{1}{10} = 0 \\ B - \dfrac{3}{10} = 1 \quad (L_2 - 2L_1) \end{cases} \iff \begin{cases} A = \dfrac{12}{10} \\ B = \dfrac{13}{10} \end{cases}$$

Finalement $\boxed{y(x) = \dfrac{1}{10}(13e^{3x} - 12e^{2x} + \sin x - \cos x)}$

2) D'une part les solutions de l'equation homogène : $y'' - y = 0$ sont $y_H(x) = Ae^x + Be^{-x}$.
D'autre part on a $\cos^2 x = \dfrac{1}{2}(1 - \cos(2x))$.
Donc $y'' - y = \cos^2 x \iff y'' - y = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}\cos(2x)$. On va séparer cette équation en deux :

(1) $\boxed{y'' - y = \dfrac{1}{2}}$: Facile on a $y_1(x) = -\dfrac{1}{2}$ est solution particulière de $y'' - y = \dfrac{1}{2}$.

(2) $\boxed{y'' - y = \cos(2x)}$: On cherche $y_2(x) = a\cos(2x) + b\sin(2x)$ solution particulière de $y'' - y = \cos(2x)$.

On a $y_2'(x) = -2a\sin 2x + 2b\cos 2x$ et $y_2''(x) = -4a\cos 2x - 4b\sin 2x = -4y_2(x)$. donc :
$y_2''(x) - y_2(x) = \cos 2x \iff -5y_p(x) = \cos 2x \iff -5a\cos 2x + -5b\sin x = \cos 2x$

Il suffit donc d'avoir : $\begin{cases} -5a = 1 \\ -5b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \dfrac{-1}{5} \\ b = 0 \end{cases}$ Ainsi $y_p(x) = -\dfrac{1}{5}\cos(2x)$.

Donc $y(x) = y_H(x) + y_1(x) - \dfrac{1}{2}y_2(x) = Ae^x + Be^{-x} + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{10}\cos(2x)$ et les conditions initiales donnent : $y(0) = 0 \iff A + B + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{10} = 0$ et $y'(0) = 1 \iff A - B = 0$.

$$\begin{cases} A + B + \dfrac{6}{10} = 0 \\ A - B = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2B = -\dfrac{3}{5} \\ A = B \quad (L_2 - 2L_1) \end{cases} \iff \begin{cases} B = -\dfrac{3}{10} \\ A = \dfrac{-3}{10} \end{cases}$$

Finalement $\boxed{y(x) = \dfrac{3}{10}(e^x + e^{-x}) + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{10}\cos(2x)}$

3) D'une part les solutions de l'equation homogène : $y'' + y' + y = 0$ sont :
$y_H(x) = A\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}x}{2}\right)e^x2 + B\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}x}{2}\right)e^x2$.
Cherchons une solution particulière $y_p(x) = ax^2 + bx + c$. On a $y_p'(x) = 2ax + b$ et $y_p''(x) = 2a$. donc :
$y_p''(x) + y_p'(x) + y_p(x) = x^2 + 2x + 3 \iff 2a + 2ax + b + ax^2 + bx + c = x^2 + 2x + 3 \iff$
$ax^2 + (2a + b)x + 2a + b + c = x^2 + 2x + 3$

Il suffit donc d'avoir : $\begin{cases} a = 1 \\ 2a + b = 2 \\ 2a + b + c = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = 0 \\ c = 1 \end{cases}$ Ainsi $y_p(x) = x^2 + 1$.

Donc $y(x) = A\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}x}{2}\right)e^{-x/2} + B\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}x}{2}\right)e^{-x/2} + x^2 + 1$ et les conditions initiales donnent :

$y(0) = 0 \iff A + 1 = 0 \iff A = -1$ et $y'(0) = 0 \iff \dfrac{A}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}B = 0 \iff B = -\dfrac{A}{\sqrt{3}} = \dfrac{-1}{\sqrt{3}}$.

Finalement $\boxed{y(x) = -\cos\left(\dfrac{\sqrt{3}x}{2}\right)e^{-x/2} - \dfrac{1}{\sqrt{3}}\sin\left(\dfrac{\sqrt{3}x}{2}\right)e^{-x/2} + x^2 + 1}$

4) D'une part les solutions de l'équation homogène : $y'' - 2y' - 3y = 0$ sont :
$y_H(x) = Ae^{-x} + Be^{3x}$.
Par ailleurs séparons l'équation différentielle :
(1) $\boxed{y'' - 2y' - 3y = 1}$: Admet la solution particulière évidente $y_1(x) = -\dfrac{1}{3}$.
(1) $\boxed{y'' - 2y' - 3y = 4e^{3x}}$: Cherchons une solution particulière $y_2(x) = (ax + b)e^{3x}$. On a $y_2'(x) = (3ax + a + 3b)e^{3x}$ et $y_2''(x) = (9ax + 6a + 9b)e^{3x}$. donc :
$y_p''(x) - 2y_p'(x) - 3y_p(x) = 4e^{3x} \iff (9ax + 6a + 9b - 6ax - 2a - 6b - 3ax - 3b)e^{3x} = 4e^{3x} \iff 4a = 4$ $\iff a = 1$. On peut donc choisir b comme on veut, posons $b = 0$. On a alors $y_2(x) = xe^{3x}$. Donc $y(x) = y_H(x) + y_1(x) + y_2(x) = Ae^{-x} + Be^{3x} - \dfrac{1}{3} + xe^{3x}$ et les conditions initiales donnent :
$y(0) = 0 \iff A + B - \dfrac{1}{3} = 0 \iff A = -1$ et $y'(0) = 0 \iff -A + 3B + 1 = 0$.

$$\begin{cases} A + B - \dfrac{1}{3} = 0 \\ -A + 3B + 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} A + B - \dfrac{1}{3} = 0 \\ 4B + \dfrac{2}{3} = 0 \quad (L_2 + L_1) \end{cases} \iff \begin{cases} A = \dfrac{1}{6} \\ B = -\dfrac{1}{6} \end{cases}$$

Finalement $\boxed{y(x) = \dfrac{1}{6}e^{-x} - \dfrac{1}{6}e^{3x} - \dfrac{1}{3} + xe^{3x}}$

Exercice 7 : Trouver les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ qui vérifient : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = f(-x)$

....

Réponse : Comme f est dérivable sur $\mathbb{R}$, on a aussi f' dérivable sur $\mathbb{R}$ car $f'(x) = f(-x)$.

On a $f''(x) = -f'(-x) = -f(x)$. Donc f est solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$. On en déduit

$f(x) = A\cos x + B\sin x$. C'est une condition nécessaire mais pas forcément suffisante.
Réciproquement si $f(x) = A\cos x + B\sin x$ alors $f'(x) = -A\sin x + B\cos x$ et on a $f'(-x) = A\sin x + B\cos x$. Donc $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f'(-x) \iff \forall x \in \mathbb{R}$, $A\cos x + B\sin x = A\sin x + B\cos x \iff A = B$ (pour la dernière équivalence le sens indirect est évident, le sens direct se fait en choisissant $x = 0$) Donc les fonctions qui vérifient $f'(x) = f(-x)$ sont $\boxed{f(x) = A(\cos x + \sin x) \text{ où } A \in \mathbb{R}}$

Equations non linéaires

Exercice 8 : Résoudre les equations différentielles suivantes :

1) $\begin{cases} 3y + y'y = 2xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} yy' = 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ **3)** $\begin{cases} (1+2y)y' = 2x \\ y(0) = 0 \end{cases}$ **4)** $\begin{cases} y' = y^2 \\ y(0) = 1 \end{cases}$ **5)** $\begin{cases} y'2^y = 5 \\ y(0) = 1 \end{cases}$

6) $\begin{cases} y''y + y'^2 = e^x \\ y(0) = 0 \text{ et } y(1) = 1 \end{cases}$ **7)** $\begin{cases} 2\ln(y') = 3x - \ln(y) \\ y(0) = 1 \end{cases}$ **8)** $\begin{cases} y' = |y+1| \\ y(0) = 0 \end{cases}$ **9)** $\begin{cases} y' = \max(y, 1) \\ y(0) = 0 \end{cases}$

. . . .

Réponses : **1)** On a $3y + y'y = 2xy \iff y = 0$ ou $3 + y' = 2x \iff y = 0$ ou $y' = 2x - 3$. On a donc une solution : $y = 0$ mais elle ne vérifie pas la condition initiale ! Pour trouver une autre solution, il suffit de résoudre $y' = 2x - 3 \iff \exists A \in \mathbb{R} \mid y(x) = x^2 - 3x + A$. Par ailleurs $y(0) = 1$ donne $A = 1$. On a donc $\boxed{y(x) = x^2 - 3x + 1}$ qui est solution sur $\mathbb{R}$.

C'est la seule solution possible. En effet, elle s'annule en $x_1 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $x_2 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$. Mais comme la dérivée y' n'est pas nulle en ces points, on ne peut par la "raccorder" avec la solution $y = 0$ qui est l'unique autre possibilité et dont la dérivée vaut 0 partout.

2) $yy' = 1 \iff (\dfrac{1}{2}y^2)' = 1 \iff \dfrac{1}{2}y^2 = x + C$. On a donc $y_1(x) = \sqrt{2x - 2C}$ ou $y_2(x) = -\sqrt{2x - 2C}$
La condition $y_1(0) = 1$ donne $\sqrt{2C} = 1 \iff 2C = 1$. La condition $y_2(0) = 1$ donne $-\sqrt{2C} = 1$ impossible car $-\sqrt{2C} \leq 0$. La seule solution est donc $\boxed{y(x) = \sqrt{2x-1} \text{ définie sur } \left[\dfrac{-1}{2}, +\infty\right[}$

3) $(1+2y)y' = 2x \iff y' + 2y'y = x \iff (y + y^2)' = 2x \iff y + y^2 = x^2 + C \iff y^2 + y - x^2 - C = 0$
On a donc $\Delta = 1 + 4(x^2 + C)$, donc $y_1(x) = \dfrac{-1 + \sqrt{1 + 4x^2 + 4C}}{2}$ ou $y_2(x) = \dfrac{-1 + \sqrt{1 + 4x^2 + 4C}}{2}$ sont les deux solutions possibles. Elles ne sont pas forcément définies partout, cela dépendra de C, il faut donc le calculer.
Pour la condition initiale $y(0) = 0$, on obtient :
$y_1(0) = \dfrac{-1 + \sqrt{1+4C}}{2} = 0 \iff \sqrt{1+4C} = 1 \implies 1 + 4C = 1 \implies C = 0$.
Synthèse : On remarque qu'en posant $C = 0$ on a effectivement $y_1(0) = 0$.
Pour y_2, on aurait $y_2(0) = 0 \iff \dfrac{-1 - \sqrt{1+4C}}{2} = 0 \iff -1 - \sqrt{1+4C} = 0$ C'est impossible car $-1 - \sqrt{1+4C} \leq -1$

On a donc la seule solution : $\boxed{y_1(x) = \dfrac{-1 + \sqrt{1+4x^2}}{2} \text{ définie sur } \mathbb{R}}$

4) $y' = y^2 \iff y = 0$ ou $y \neq 0$ et $\dfrac{y'}{y^2} = 1$ La solution $y = 0$ n'est une pas solution vérifiant $y(0) = 1$.

Regardons donc $\dfrac{y'}{y^2} = 1 \iff \left(-\dfrac{1}{y}\right)' = 1 \iff -\dfrac{1}{y} = x + C \iff y = \dfrac{-1}{x + C}$ pour $x \neq -C$.

La condition initiale donne $y(0) = 1 \iff \dfrac{-1}{C} = 1 \iff C = -1$

On a donc la seule solution : $\boxed{y(x) = \dfrac{1}{x-1} \text{ définie sur } \mathbb{R}\backslash\{1\}}$

5) $y'2^y = 5 \iff y'e^{y\ln 2} = 5 \iff (\dfrac{1}{\ln 2}e^{y\ln 2})' = 5 \iff \dfrac{1}{\ln 2}e^{y\ln 2} = 5x + C$

$\iff e^{y\ln 2} = 5\ln(2)x + D \iff y = \dfrac{1}{\ln 2}\ln(5\ln(2)x + D)$
Par ailleurs $y(0) = 1 \iff e^{\ln 2} = D \iff D = 2$ Donc l'unique solution est :

$$\boxed{y(x) = \frac{\ln(5\ln 2\cdot x + 2)}{\ln 2} = \log_2(5\ln 2\cdot x + 2) \text{ définie sur } \left]-\frac{2}{5\ln 2}, +\infty\right[}$$

6) $y''y + y'^2 = e^x \iff (y'y)' = e^x \iff y'y = e^x + C \iff \left(\dfrac{1}{2}y^2\right)' = e^x + C \iff y^2 = 2e^x + Cx + D$
On a donc $y_1(x) = \sqrt{2e^x + Cx + D}$ ou $y_2(x) = -\sqrt{2e^x + Cx + D}$.
La condition $y_2(1) = 1$ ne peut pas être vérifiée car$y_2 \leq 0$ donc la seule solution possible est sur y_1 :
On a $y_1(0) = 0 \iff \sqrt{2 + D} = 0 \iff D = -2$ et $y_1(1) = 1 \iff \sqrt{2e + C + D} = 1 \iff 2e + C + D = 1 \iff C = 1 - 2e - D = 3 - 2e$. Finalement la seule solution est $\boxed{y_1(x) = \sqrt{2e^x + (3 - 2e)x - 2}}$

Son ensemble de définition n'est pas facile à calculer, mais on sait qu'elle est définie en 0 et en 1.

7) $2\ln(y') = 3x - \ln(y) \iff \ln((y')^2) + \ln y = 3x \iff \ln((y')^2y) = 3x \iff (y')^2y = e^{3x}$
$\iff y'y^{\frac{1}{2}} = e^{\frac{3}{2}x} \iff (\dfrac{2}{3}y^{\frac{3}{2}})' = e^{\frac{3}{2}x} \iff \dfrac{2}{3}y^{\frac{3}{2}} = \dfrac{2}{3}e^{\frac{3}{2}x} + C \iff y(x) = \left(e^{\frac{3}{2}x} + D\right)^{\frac{2}{3}}$
La condition initiale donne $y(0) = 1 \iff \left(e^0 + D\right)^{\frac{2}{3}} = 1 \iff 1 + D = 1 \iff D = 0$
Finalement $\boxed{y(x) = e^x \text{ définie sur } \mathbb{R}}$
8) Si $y \geq -1$ alors $y' = y + 1$ Donc $y(x) = Ce^x - 1$. On a alors $y \geq -1 \iff Ce^x \geq 0 \iff C \geq 0$ Donc il faut fixer $C \in \mathbb{R}_+$.
Si $y \leq -1$ alors $y' = -y - 1$ Donc $y(x) = De^{-x} - 1$. On a alors $y \leq -1 \iff De^{-x} \leq 0 \iff D \leq 0$ Donc il faut fixer $D \in \mathbb{R}_-$.
Pour obtenir $y(0) = 0$ on est donc dans le premier cas et on trouve $\boxed{y(x) = e^x - 1}$ définie sur $\mathbb{R}$.

9) $y' = \max(1, y) \iff \begin{cases} y' = 1 \\ y \leq 1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} y' = y \\ y \geq 1 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x + C \\ x + C \leq 1 \end{cases}$ ou $\begin{cases} y = De^x \\ De^x \geq 1 \end{cases}$
$\iff \begin{cases} y(x) = x + C & \text{si } x + C \leq 1 \\ y(x) = De^x & \text{si } De^x \geq 1 \end{cases}$
La condition $y(0) = 0$ correspond au cas où $y(x) \leq 1$ donc on a alors $y(x) = x + C \implies y(0) = C = 0$ Donc $y(x) = x$ pour $x \leq 1$.
Par ailleurs trouver D tel que $y(x) = De^x \iff x \geq 1$. On a $De^x \geq 1 \iff x \geq \ln\dfrac{1}{D} = -\ln D$ Donc on veut $D = e^{-1}$ ainsi $y(x) = e^{x-1} \iff x \geq 1$.
La solution est donc $\boxed{y(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \leq 1 \\ e^{x-1} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}}$ définie sur $\mathbb{R}$.
Par acquis de conscience vérifions qu'elle est bien continue et dérivable sur $\mathbb{R}$: on a $y(1) = 1 = e^{1-1}$ OK et $y'(x) = 1$ si $x \leq 1$; $y'(x) = e^{x-1}$ si $x \geq 1$ donc $y'(1) = 1$ est bien vérifié des deux côtés.

<u>Exercice 9</u> : *(Changement d'inconnue)*
1) Résoudre l'équation différentielle $y' = y\ln y$ en posant $y(t) = e^{z(t)}$

2) Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle :

$$(E): \quad x^2y'' + 4xy' - (x^2 - 2)y = 0$$

On pourra poser z tel que $\forall x > 0$, $z(x) = x^2y(x)$.

3) Résoudre sur $]0, 1[$ l'équation différentielle :

$$x(1 - x)y'' + (1 - 3x)y' - y = 0$$

On pourra poser z tel que $\forall x > 0$, $y(x) = \dfrac{z(x)}{1 - x}$.

. . . .

Réponses : **1)** Résoudre l'équation différentielle $y' = y \ln y$. Dans cette équation on présuppose que y est strictement positive, sinon elle n'est pas valable à cause du ln. en posant $y(t) = e^{z(t)}$. On crée la fonction $z = \ln y$ qui est dérivable comme la composée de fonction dérivables.
On a $y' = z'e^z$ donc $y' = y \ln y \iff z'e^z = ze^z \iff z' = z$
On en déduit $z(t) = Ae^t$ et $\boxed{y(t) = \exp(Ae^t)}$ où $A \in \mathbb{R}$.

2) $z(x) = x^2 y(x)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On a $z'(x) = 2xy(x) + x^2 y'(x)$ et
$z''(x) = 2y(x) + 4xy'(x) + x^2 y''(x) = 2y(x) + (x^2 - 2)y(x) = x^2 y(x) = z(x)$

Donc $z'' = z$ et z est solution d'une equation différentielle d'ordre 2. On a $z(x) = Ae^x + Be^{-x}$.
On en déduit pour $x > 0$, $\boxed{y(x) = \dfrac{Ae^x + Be^{-x}}{x^2}}$, où $A, B \in \mathbb{R}$.
3) $z(x) = (1-x)y(x)$ est définie et dérivable sur $]0,1[$. On a $z'(x) = -y(x) + (1-x)y'(x)$ et
$z''(x) = -y'(x) + -y'(x) + (1-x)y''(x) = -2y'(x) + (1-x)y''(x)$

Donc $xz''(x) = x(1-x)y''(x) - 2xy'(x) = -(1-x)y'(x) + y(x) = z'(x)$ et $z''(x) = \dfrac{1}{x}z'(x)$

On a donc $z'(x) = Ae^{\ln x} = Ax$ et $z(x) = Bx^2 + C$. en posant $B = \dfrac{A}{2}$.

Finalement pour $x \in]0,1[$, $\boxed{y(x) = \dfrac{Ax^2 + B}{1-x}}$, où $A, B \in \mathbb{R}$.

<u>**Exercice 10**</u> **:** *(Systèmes d'équations différentielles)* Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $\begin{cases} y' = y + 2z + 1 \\ z' = 2y + z + 2 \\ y(0) = z(0) = 0 \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} y' = 2y + z \\ z'' = y' \\ y(0) = z(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \text{ et } z'(0) = 1 \end{cases}$ **3)** $\begin{cases} y'' = 3z' + 4y \\ z'' = 3y' + 4z \\ y(0) = z(0) = 1 \\ y'(0) = z'(0) = 0 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 5xy' = (3x^2+2)y + 6(x^2-1)z \\ 5xz' = (x^2-1)y + (2x^2+3)z \\ y(0) = z(0) = 1 \end{cases}$

. . . .

Réponses : **1)** $\begin{cases} y' = y + 2z + 1 \\ z' = 2y + z + 2 \end{cases}$
(1) En faisant $L_1 + L_2$ on trouve $z' + y' = 3y + 3z + 3 \iff (z+y)' = 3(z+y) + 3$.
On a donc $y(x) + z(x) = Ce^{3x} - 1$ et la condition initiale donne $y(0) + z(0) = 0 \iff C = 1$
Finalement $y(x) + z(x) = e^{3x} - 1$.

(2) En faisant $L_1 - L_2$ on trouve $y' - z' = 0 - y + z - 1 \iff (y-z)' = -(y-z) - 1$.
On a donc $y(x) - z(x) = De^{-x} - 1$ et la condition initiale donne $y(0) - z(0) = 0 \iff D = 1$
Finalement $y(x) - z(x) = e^{-x} - 1$.

Finalement on utilise $y = \dfrac{1}{2}(y + z + y - z)$ et $z = \dfrac{1}{2}(y + z - (y - z))$ pour trouver :
$$\boxed{y(x) = \frac{e^{3x} + e^{-x}}{2} - 1 \text{ et } z(x) = \frac{e^{3x} - e^{-x}}{2}}$$
2) On a $z'' = y'$ donc $z' = y + A$ où $A \in \mathbb{R}$ et en dérivant l'équation $y' = 2y + z$ on obtient : $y" = 2y' + z' = 2y' + y + A$.
Donc $y'' - 2y' - y = A$. Cela donne $y(x) = Be^{(1+\sqrt{2})x} + Ce^{(1-\sqrt{2})x} - A$
et $z(x) = y(x) + Ax + D = Be^{(1+\sqrt{2})x} + Ce^{(1-\sqrt{2})x} + Ax + D$
Les conditions initiales donnent $z(0) = 0 \iff B + C + D = 0$; $y(0) = 0 \iff B + C - A = 0$

$y'(0)=0 \iff (1+\sqrt{2})B+(1-\sqrt{2})C=0$ et $z'(0)=1 \iff (1+\sqrt{2})B+(1-\sqrt{2})C-A=1$

$$\begin{cases} B+C+D=0 \\ B+C-A=0 \\ (1+\sqrt{2})B+(1-\sqrt{2})C=0 \\ (1+\sqrt{2})B+(1-\sqrt{2})C-A=1 \end{cases} \iff \begin{cases} B+C=-D \\ B+C=A \\ B+C+\sqrt{2}(B-C)=0 \\ A=-1 \end{cases} \iff \begin{cases} A=-1 \\ D=-A=1 \\ B+C=1 \\ 1+\sqrt{2}(B-C)=0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} A=-1 \\ D=1 \\ C=1-B \\ \sqrt{2}(2B-1)=-1 \end{cases} \iff \begin{cases} A=-1 \\ D=1 \\ C=1-B \\ B=\dfrac{-1}{2\sqrt{2}}+\dfrac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} A=-1 \\ D=1 \\ C=\dfrac{2+\sqrt{2}}{4} \\ B=\dfrac{2-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

Finalement $\boxed{y(x)=\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}e^{(1+\sqrt{2})x}+\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}e^{(1-\sqrt{2})x}-1}$ et $\boxed{z(x)=\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}e^{(1+\sqrt{2})x}+\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}e^{(1-\sqrt{2})x}-x+1}$

3) $\begin{cases} y''=3z'+4y \\ z''=3y'+4z \end{cases}$

(1) L_1+L_2 donne $y''+z''=3y'+3z'+4y+4z \iff (y+z)''-3(y+z)'-4(y+z)=0$ On a donc $y(x)+z(x)=Ae^{4x}+Be^{-x}$ et les conditions initiales donnent : $y(0)+z(0)=2 \iff A+B=2$; $y'(0)+z'(0)=0 \iff 4A-B=0 \iff B=4A$ donc $B=\dfrac{2}{5}$ et $A=\dfrac{1}{10}$. Finalement $y(x)+z(x)=\dfrac{e^{4x}+4e^{-x}}{10}$

(2) L_1-L_2 donne $y''-z''=3y'-3z'+4y-4z \iff (y-z)''-3(y-z)'-4(y-z)=0$

Mais pas besoin de résoudre : les conditions initiales donnent $y(0)-z(0)=y'(0)-z'(0)=0$.

La fonction nulle est donc l'unique solution ! On a $y-z=0$ c'est à dire $y=z$.

Finalement $\boxed{y(x)=z(x)=\dfrac{e^{4x}+4e^{-x}}{20}}$

4) Compliqué à voir mais en gros on peut déjà simplifier les x^2 :

(1) En faisant L_1-3L_2 on obtient $5x(y'-3z')=5y-15z' \iff y'-3z'=\dfrac{1}{x}(y-3z)$

Donc $y-3z=Ae^{\ln x}=Ax$ et $y(0)-3z(0)=2 \iff A=2$ donc $y(x)-3z(x)=2x$

Maintenant on peut essayer de garder les x^2 et d'éliminer les 'constantes' : (2) En faisant L_1+2L_2 on obtient $5x(y'+2z')=5x^2y+10x^2z \iff y'+2z'=x(y+2z)$

Donc $y+2z=Ae^{\frac{x^2}{2}}$ et $y(0)+2z(0)=3 \iff A=3$ donc $y(x)+2z(x)=3e^{\frac{x^2}{2}}$

Finalement on utilise $y=\dfrac{2(y-3z)+3(y+2z)}{5}$ et $z=\dfrac{(y+2z)-(y-3z)}{5}$ pour obtenir le résultat :

$\boxed{y(x)=\dfrac{1}{5}\left(4x+9e^{\frac{x^2}{2}}\right) \text{ et } z(x)=\dfrac{1}{5}\left(3e^{\frac{x^2}{2}}-2x\right)}$

<u>Exercice 11</u> : *(ordre supérieur)* Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $\begin{cases} y'''-2y''+y'-2y=-2 \\ y(0)=y'(0)=y''(0)=0 \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} y''''=2y''-y \\ y(0)=y'(0)=y''(0)=0 \\ y'''(0)=1 \end{cases}$

....

Réponses :

1) <u>1ere méthode :</u> On pose le changement de variable $z=y'-2y$ ainsi d'après l'équation différentielle :

On a $y'''-2y''+y'-2y=-2 \iff z''+z=-2$.

On a donc $z(x)=A\cos x+B\sin x+2$ (car 2 est solution particulière).

et les conditions initiales $z(0)=z'(0)=0$ donnent $A=-2$ et $B=0$ ainsi $\boxed{z(x)=2\cos x-2}$

On résout donc $y'(x)-2y(x)=2\cos x-2$ sur $\mathbb{R}$.

On a $y_H(x)=\lambda e^{2x}$ et $y_{p1}(x)=1$ est solution particulière de $y'-2y=-2$.

Reste à trouver y_{p2}, solution particulière de $y'-2y=\cos(x)$. On suppose $y_{p2}(x)=\lambda(x)e^{2x}$ avec λ une fonction dérivable. La méthode de variation de la constante donne $\lambda'(x)=\cos xe^{-2x}$.

On a $\cos x e^{-2x} = \mathrm{Re}\big(2e^{ix-2x}\big) = \mathrm{Re}\Big(2e^{x(i-2)}\Big)$. Or la primitive de $x \mapsto e^{x(i-2)}$ est $x \mapsto \dfrac{e^{x(i-2)}}{i-2}$

$\dfrac{e^{x(i-2)}}{i-2} = \dfrac{(-2-i)e^{x(i+2)}}{5} = \dfrac{e^{2x}}{5}(-2\cos x + \sin x - i(\cos x + 2\sin x))$

Finalement $y_{p2}(x) = \dfrac{1}{5}(2\cos x - \sin x)$ et $y(x) = y_H(x) + y_{p1}(x) + 2y_{p2}(x) = \lambda e^{2x} + 1 - \dfrac{4}{5}\cos x + \dfrac{2}{5}\sin x$

et $y(0) = 0 \iff \lambda + 1 - \dfrac{4}{5} = 0 \iff \lambda = -\dfrac{1}{5}$.

Finalement $\boxed{y(x) = \dfrac{1}{5}(2\sin x - 4\cos x - e^{2x}) + 1}$

<u>2e méthode :</u> On a l'équation caractéristique $r^3 - 2r^2 + r - 2 = (r-2)(r^2+1) = (r-2)(r-i)(r+i)$

Les solutions ont donc $y(x) = Ae^{2x} + B\cos(x) + C\sin(x) + 1$ (ne pas oublier la solution particulière $y_p(x) = 1$).

Les conditions initiales donnent $y(0) = A + B + 1 = 0$; $y'(0) = 2A + C = 0$; $y''(0) = 4A - B = 0$ on a :

$$\begin{cases} A + B + 1 = 0 \\ 2A + C = 0 \\ 4A - B = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 5A + 1 = 0 \\ C = -2A \\ B = 4A \end{cases} \iff \begin{cases} A = \dfrac{-1}{5} \\ C = \dfrac{2}{5} \\ B = \dfrac{-4}{5} \end{cases} \text{ Finalement } \boxed{y(x) = \frac{1}{5}\big(2\sin x - 4\cos x - e^{2x}\big) + 1}$$

2) On généralise le raisonnement des equations linéaires d'ordre 2 : On a une equation caractéristique : $r^4 = 2r^2 - 1 \iff r^4 - 2r^2 + 1 = 0 \iff (r^2-1)^2 = 0 \iff (r-1)^2(r+1)^2 = 0$ Donc 1 et -1 sont des racines doubles de ce polynôme, on en déduit que $y(x) = (Ax+B)e^x + (Cx+D)e^{-x}$

Par ailleurs $y(0) = 0 \iff B + D = 0$; $y'(0) = 0 \iff A + B + C - D = 0$; $y''(0) = 0 \iff 2A + B - 2C + D = 0$ et $y'''(0) = 1 \iff 3A + B + 3C - D = 1$ On a donc le système :

$$\begin{cases} B + D = 0 \\ A + B + C - D = 0 \\ 2A + B - 2C + D = 0 \\ 3A + B + 3C - D = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} B + D = 0 \\ A + B + C - D = 0 \\ 2A - 2C = 0 \\ 2A + 2C = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} B + D = 0 \\ 2A + B - D = 0 \\ A = C \\ 4A = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} A = \dfrac{1}{4} \\ C = \dfrac{1}{4} \\ B = -D \\ 2A + 2B = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} A = \dfrac{1}{4} \\ C = \dfrac{1}{4} \\ D = \dfrac{1}{4} \\ B = \dfrac{-1}{4} \end{cases} \text{ Finalement } \boxed{y(x) = \frac{1}{4}\big((1-x)e^x + (1+x)e^{-x}\big)}$$
