

TD9 - Dénombrement

1BCPST 2

Feuille d'exercice

Année 2023- 2024

Permutations

Exercice 1 : ★ On se donne la permutation de $\llbracket 1, 8 \rrbracket$ suivante :

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$\sigma(n)$	6	8	3	7	2	1	5	4

- 1) Calculer $\sigma(2)$, $\sigma(6)$, $\sigma^{-1}(3)$, $\sigma^{-1}(1)$, $\sigma \circ \sigma(1)$.
- 2) Dresser le tableau de σ^{-1} .
- 3) Dresser le tableau de $\sigma \circ \sigma$.

Exercice 2 : ★★ On appelle transposition de $\llbracket 1, n \rrbracket$ une application telle que pour $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on a :

$$\tau_{i,j} : \begin{array}{ccc} \llbracket 1, n \rrbracket & \rightarrow & \llbracket 1, n \rrbracket \\ k & \mapsto & \begin{cases} k & \text{si } k \notin \{i, j\} \\ j & \text{si } k = i \\ i & \text{si } k = j \end{cases} \end{array}$$

- 1) Montrer que $\tau_{i,j}$ est une permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$
- 2) Calculer $\tau_{i,j}^{-1}$.
- 3) Quelle est la permutation $\tau_{i,j} \circ \tau_{j,k}$?
- 4) Calculer $\tau_{1,2} \circ \tau_{2,3} \circ \dots \circ \tau_{1,n}$.
- 5) Soit σ la permutation de $\llbracket 1, n \rrbracket$ telle que $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 3$ et $\sigma(3) = 1$ et pour $k > 3$, $\sigma(k) = k$. Exprimer σ en fonction de transpositions.
- 6) Dénombrer l'ensemble $\{\tau_{i,j} \mid (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2\}$

Dénombrement

Exercice 3 : ★ 1) On lance deux dés et on fait la somme des deux chiffres obtenus, dénombrer le nombre de combinaisons qui donne 7. (Par exemple (3,4) et (4,3) sont deux combinaisons différentes qui donnent 7).

Remarque : Cela revient à calculer $|E|$ où $E = \{(k, l) \in \llbracket 1, 6 \rrbracket^2 \mid k + l = 7\}$

- 2) Même question avec trois dés : calculer le cardinal de $F = \{(k, l, m) \in \llbracket 1, 6 \rrbracket^3 \mid k + l + m = 7\}$

Exercice 4 : ★ - ★★ Une urne contient 5 balles de cinq couleurs différentes. A chaque fois qu'une boule est tirée, elle est remise ensuite dans l'urne. On retient l'ordre dans lequel les balles ont été tirées.

On tire ainsi successivement 3 boules.

- 1) Combien y a-t-il de tirages différents possibles en tout ?
- 2) Une boule est rouge. Combien y a-t-il de tirages avec au moins une fois la boule rouge ?
- 3) Une boule est orange. Combien y-a-il de tirages avec exactement une fois la boule rouge ou au exactement une fois la boule orange ?
- 4) Combien y-a-t-il de tirages où l'on tire la boule rouge uniquement après avoir tiré la boule orange ?
- 5) Répondre aux même questions mais cette fois avec n couleurs et un de p boules.

Exercice 5 : ★★ On dispose de 3 urnes différentes et de n balles numérotées de 1 à n . On répartit au hasard certaines balles dans les urnes.

- 1) Combien y a-t-il de remplissages différents possibles en tout ?
- 2) Combien y a-t-il de remplissages avec toutes les balles réparties dans les 3 urnes ?
- 3) Combien y a-t-il de remplissages avec la balle numéro 1 dans l'urne numéro 1 ?
- 4) Combien y a-t-il de remplissages avec la balle numéro 1 et la balle numéro 2 dans une urne différente ?

Exercice 6 : ★★ - ★★★ Soit E et F des ensembles. On note $|E| = n$ et $|F| = p$. Donner le nombre d'applications injectives de E dans F . Donner le nombre d'applications surjectives de E dans F .

Exercice 7 : ★★★ Combien existe-t-il d'anagrammes du mot "bonjour" ? et "abracadabra" ?

Remarque : un anagramme est un mot contenant les exactement mêmes lettres dans le même nombre, par exemple bjnnoor est un anagramme possible de bonjour

.....
 Réponses : Remarquons déjà qu'il y a 7 lettres dans le mot "bonjour". si toutes les lettres étaient différentes, il y aurait autant d'anagrammes que de permutations des lettres c'est à dire 7!. Cependant en comptant ainsi, deux fois comptons plusieurs fois de nombreux mots. Par exemple *bonjonr* est compté quatre fois : bo^1njo^2ur et bo^2njo^1ur . C'est la même chose pour tous anagrammes. On a donc en tout $\boxed{\frac{7!}{2}}$ anagrammes de "bonjour".

Combinaisons

Exercice 8 : ★ On tire successivement 5 boules dans une urne contenant 10 boules blanches et 5 boules noires (sans remise).

- 1) Combien y a-t-il de tirages au total ?
- 2) Combien y a-t-il de tirages avec au moins une boule noire ?

Exercice 9 : ★ - ★★ On tire une main de 5 cartes d'un jeu de 52 cartes. Combien y a-t-il de mains :

- 1) avec au moins une dame ? 2) avec au plus une dame ? 3) Avec la dame de coeur ?
- 4) Dont toutes les cartes sont de la même couleur ? ($\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit$)
- 5) Avec une suite ? 6) Avec un carré (quatre cartes pareilles) ? 7) Avec un Breton (3 cartes pareilles) ?

Exercice 10 : ★★ Prouver les formules classiques suivantes à l'aide d'un raisonnement combinatoire :

$$1) \binom{n}{p} + \binom{n}{p-1} = \binom{n+1}{p} \quad 2) \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = 2^n \quad 3) (x+y)^n = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Exercice 11 : ★★ Soient $m, n, p \in \mathbb{N}$. A l'aide d'arguments, de dénombrements, montrer la formule suivante :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \binom{m}{p-k} = \binom{n+m}{p}$$

Exercice 12 : ★★★ Un magasin propose des billes de 5 couleurs différentes. Donner le nombre de façons de remplir un sac avec 20 billes.

Exercice 13 : ★★★ Des cartes de poker sont disposées sur la table :

$$5\clubsuit \quad R\spadesuit \quad Q\heartsuit$$

J'ai un superbe Breton de rois avec mes deux cartes en main $R\clubsuit \quad R\diamondsuit$. Cependant, selon ce qui va arriver, de nombreuses configurations peuvent me faire perdre.

- 1) Dans un premier temps calculons le nombre de configurations totales pour un adversaire. Sachant que un adversaire a deux cartes et que deux cartes vont encore être disposées sur la table, combien y a-t-il de configurations possibles à la fin pour l'adversaire ?
- 2) **Quinte flush** : calculer le nombre de possibilités pour qu'un adversaire puisse aligner cinq cartes consécutives de même couleur dans cette configuration.
- 3) **Carré** : Un carré consiste à avoir 4 cartes pareilles. Calculer le nombre de possibilités pour qu'un adversaire ait un carré meilleur que mon jeu dans cette configuration.
- 4) **Full** : Un full consiste à avoir un breton et une paire. Calculer le nombre de possibilités qui donnent à l'adversaire un full meilleur que mon jeu.
- 5) **Couleur** : Une couleur consiste à avoir 5 cartes avec le même symbole. Calculer le nombre de possibilités pour qu'un adversaire me batte avec une couleur.
- 6) **Quinte** : Une quinte consiste à avoir 5 cartes consécutives. Calculer le nombre de possibilités pour qu'un adversaire me batte avec une quinte.
- 7) **Conclusion** : compter le nombre total de configuration qui me font perdre. Ai-je plus de chances de gagner ou de perdre ?