TD - Dénombrement

1BCPST 2 — Feuille d'exercice — Année 2022- 2023

Permutations

Exercice 1 : On se donne la permutation de $[\![1,8]\!]$ suivante :

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$\sigma(n)$	6	8	3	7	2	1	5	4

1) Calculer $\sigma(2)$, $\sigma(6)$. $\sigma^{-1}(3)$, $\sigma^{-1}(1)$, $\sigma\circ\sigma(1)$.
2) Dresser le tableau de σ^{-1}
3) Dresser le tableau de $\sigma\circ\sigma$.

....

Réponse :

n	1	2	3	4	5	6	7	8
$\sigma(n)$	6	8	3	7	2	1	5	4
$\sigma^{-1}(n)$	6	5	3	8	7	1	4	2
$\sigma\circ\sigma(n)$	1	4	3	5	8	6	2	7

Exercice 2 : On appelle transposition de $[\![1,n]\!]$ une application telle que pour $i,j\in[\![1,n]\!]$, on a :

$$\tau_{i,j}:\begin{array}{ccc}[\![1,n]\!] & \to & [\![1,n]\!]\\ k & \mapsto & \begin{cases} k \text{ si } k\notin\{i,j\}\\ j \text{ si } k=i\\ i \text{ si } k=j\end{cases}\end{array}$$

1) Montrer que $\tau_{i,j}$ est une permutation de $[\![1,n]\!]$ **2)** Calculer $\tau_{i,j}^{-1}$.
3) Quelle est la permutation $\tau_{i,j}\circ\tau_{j,k}$? **4)** Calculer $\tau_{1,2}\circ\tau_{2,3}\circ\ldots\circ\tau_{n-1,n}$.
5) Soit σ la permutation de $[\![1,n]\!]$ telle que $\sigma(1)=2$, $\sigma(2)=3$ et $\sigma(3)=1$ et pour $k>3, \sigma(k)=k$.
Exprimer σ en fonction de transpositions.
6) Dénombrer l'ensemble $\{\tau_{i,j} \mid (i,j)\in[\![1,n]\!]^2\}$

....

Réponse : **1)** **2)** Montrer que $\tau_{i,j}\circ\tau_{i,j}=\text{id}$ donc $\tau_{i,j}$ est bijective (c'est une involution) et admet pour réciproque elle-même : $\tau_{i,j}^{-1}=\tau_{i,j}$.
3) Elle change $i\to j$, $k\to i$ et $j\to k$ On remarque que $\sigma=\tau_{1,2}\circ\tau_{2,3}\circ\ldots\circ\tau_{n-1,n}$, vérifie $\sigma(k)=k+1$ si $k\in[\![1,n-1]\!]$ et $\sigma(n)=1$. **4)** D'après la question 4) on a pour $i=1$, $j=2$, $k=3$: $\sigma=\tau_{1,2}\circ\tau_{2,3}$ **5)** Pour créer une transposition il suffit de prendre un couple (i,j) avec $i\neq j$. On a donc $n(n-1)$ possibilités des couples. Mais attention, on a $\tau_{i,j}=\tau_{j,i}$, donc on compte deux fois chaque transposition. Le nombre total de transposition est finalement $\boxed{\dfrac{n(n-1)}{2}}$

Dénombrement

Exercice 3 : **1)** On lance deux dés et on fait la somme des deux chiffres obtenus, dénombrer le nombre de combinaisons qui donne 7. (Par exemple (3,4) et (4,3) sont deux combinaisons différentes qui donnent 7).
Remarque : Cela revient à calculer $|E|$ où $E=\{(k,l)\in[\![1,6]\!]^2 \mid k+l=7\}$

2) Même question avec trois dés : calculer le cardinal de $F=\{(k,l,m)\in[\![1,6]\!]^3 \mid k+l+m=7\}$

3) Cette fois on pose $n\in\mathbb{N}$ et on lance n dés et on fait la somme des résultats. Calculer le nombre de combinaisons qui donnent $2n$, puis le nombre de combinaisons qui donnent $3n$.

....

Réponses : **1)** On a $7=1+6=2+5=4+3$ Donc $\boxed{\text{6 combinaisons possibles}}$
2) <u>Si le premier dé vaut 1 :</u> On a $6=1+5=2+4=3+3$. Donc 5 possibilités.

Si le premier dé vaut 2 : On a $5 = 1 + 4 = 2 + 3$. Donc 4 possibilités.

Etc... On a donc $1 + 2 + 3 + 4 + 5 =$ $\boxed{\text{15 combinaisons possibles.}}$

3) La question est nulle et impossible à résoudre avec des formules simples. Demandez vous plutôt le nombre de combinaison pour une somme de n dés qui vaut $n + 1$, $n + 2$ ou $n + 3$.

Exercice 4 : ★ - ★★ Une urne contient 5 balles de cinq couleurs différentes. A chaque fois qu'une boule est tirée, elle est remise ensuite dans l'urne. On retient l'ordre dans lequel les balles ont été tirées.
On tire ainsi successivement 3 boules.
1) Combien y a-t-il de tirages différents possibles en tout ?
2) Une boule est rouge. Combien y a-t-il de tirages avec au moins une fois la boule rouge ?
3) Une boule est orange. Combien y-a-il de tirages avec exactement une fois la boule rouge ou au exactement une fois la boule orange ?
4) Combien y-a-t-il de tirages où l'on tire la boule rouge uniquement après avoir tiré la boule orange ?
5) Répondre aux même questions mais cette fois avec n couleurs.

....

Réponses : **1)** Cela revient à tirer dans l'ensemble $E = \{a, b, c, r, o\}$ cinq fois, c'est à dire tirer un triplet, un élément de E^3. Donc il y a $\text{Card}(E^3) = \text{Card}(E)^3 = 5^3 = \boxed{125}$ tirages en tout.

2) L'ensemble des tirages sans boules rouge est $(E\backslash\{r\})^3$.
Si on appelle R l'ensemble des tirages avec au moins une rouge, on trouve que $R = \overline{(E\backslash\{r\})^3}$ et donc :
$\text{Card}(R) = \text{Card}(E^3) - \text{Card}((E\backslash\{r\})^3) = 5^3 - 4^3 = 125 - 64 = \boxed{69}$

3) On appelle respectivement R_1 et O_1 l'ensemble des tirages avec une boule rouge et orange.
On a ainsi $\text{Card}(O_1 \cup R_1) = \text{Card}O_1 + \text{Card}R_1 - \text{Card}(O_1 \cap R_1) = 2\text{Card}R_1 - \text{Card}(O_1 \cap R_1)$.
Car le nombre de tirages avec exactement une rouge correspond aux nombre de tirages avec exactement une orange : $\text{Card}R_1 = \text{Card}O_1$.
Combien de tirages correspondent à R_1 ? Une balle tirée est rouge, on a 3 positions possibles pour cette balle. Ensuite les autres balles sont libres parmi les 4 restantes donc 4^2 possibilités.
Ainsi $\text{Card}(R_1) = 3 \times 4^2 = 3 \times 16 = 48$.
Par ailleurs $O_1 \cap R_1$ représente l'ensemble des tirages exactement une rouge et une orange. Combien de tirages correspondent ?
Il faut choisir la position de la rouge : 3 possibilités, puis la position de l'orange : 2 possibilités. Enfin, reste 3 choix pour la couleur de la balle restante. Ainsi $\text{Card}(R_1 \cap O_1) = 3 \times 2 \times 3 = 18$
En conclusion : $\text{Card}(O_1 \cup R_1) = 2\text{Card}R_1 - \text{Card}(O_1 \cap R_1) = 2 \times 48 - 18 = 2 \times (48 - 9) = 2 \times 39 = \boxed{78}$

4) Enumérons les possibilités :
A) La rouge est tirée en 1ere et l'orange en 2eme : 5 possibilités pour la 3e
B) La rouge est tirée en 1ere et l'orange en 3eme : 4 possibilités pour la 2e (l'orange en 2e est comptée dans A)
C) La rouge est tirée en 2e et l'orange en 3eme : 3 possibilités pour la 1ere (la rouge en 1ere est comptée dans A et l'orange ne peut pas être avant la rouge)

On a construit les ensembles A, B et C de telle sorte à ce qu'ils soient disjoints deux à deux. Ainsi le nombre de tirages est $\text{Card}(A \cup B \cup C) = \text{Card}A + \text{Card}B + \text{Card}C = 5 + 4 + 3 = \boxed{12}$.

Exercice 5 : ★★ On dispose de 3 urnes différentes et de n balles numérotées de 1 à n. On répartit au hasard certaines balles dans les urnes.
1) Combien y a-t-il de remplissages différents possibles en tout ?
2) Combien y a-t-il de remplissages avec toutes les balles réparties dans les 3 urnes ?
3) Combien y a-t-il de remplissages avec la balle numéro 1 dans l'urne numéro 1 ?
4) Combien y a-t-il de remplissages avec la balle numéro 1 et la balle numéro 2 dans une urne différente ?

....

Réponses : **1)** Cela revient à attribuer à chaque balle une urne ou pas. On associe à 0, le fait de ne pas avoir d'urne et 1,2,3 les urnes numérotées. On associe à chaque balle un numéro entre 0 et 3, ce qui veut dire qu'on construit une fonction $f : [\![1, n]\!] \to [\![0, 3]\!]$.

On a donc $\mathrm{Card}[\![0,3]\!]^{[\![1,n]\!]} = \mathrm{Card}[\![0,3]\!]^{\mathrm{Card}[\![1,n]\!]} = \boxed{4^n}$.

2) Cela revient à compter les fonctions $f : [\![1,n]\!] \to [\![1,3]\!]$ donc : $\mathrm{Card}[\![1,3]\!]^{[\![1,n]\!]} = \mathrm{Card}[\![1,3]\!]^{\mathrm{Card}[\![1,n]\!]} = \boxed{3^n}$

3) Cela revient à compter les fonctions $f : [\![2,n]\!] \to [\![0,3]\!]$ donc : $\mathrm{Card}[\![0,3]\!]^{[\![2,n]\!]} = \mathrm{Card}[\![0,3]\!]^{\mathrm{Card}[\![2,n]\!]} = \boxed{4^{n-1}}$

4) Comptons les fonctions avec les deux premieres balles dans la même urne. Il y a 3 possibilités : elles sont soit dans l'urne 1 toutes les deux, soit dans l'urne 2, soit dans l'urne 3. Cela établit il reste à compter les possibilités pour les autres balles, qui revient à compter les fonction $f : [\![3,n]\!] \to [\![0,3]\!]$ Ainsi on a en tout : $3 \times 4^{n-2}$ possibilités.

Ce qui nous intéresse est l'ensemble complémentaire donc $4^n - 3 \times 4^{n-2} = (4^2 - 3) \times 4^{n-2} = \boxed{13 \times 4^{n-2}}$

Exercice 6 : ★★ - ★★★ Soit E et F des ensembles. On note $|E| = n$ et $|F| = p$. Donner le nombre d'applications injectives de E dans F. Donner le nombre d'applications surjectives de E dans F.

....

Réponses : Injectives : On note $E = \{e_1, \dots, e_n\}$.

1er cas : Si $n > p$ alors il n'y a pas d'application injective de E vers F.

2e cas : Si $n \leq p$ alors on a pour $f(e_1)$, p possibilités parmi les éléments de F

puis $f(e_1)$ étant choisi restent $p-1$ possibilités $f(e_2)$ car $f(e_2)$ doit être différent de $f(e_1)$.

puis $f(e_1)$ et $f(e_2)$ étant choisi restent $p-2$ possibilités $f(e_3)$.

$\cdots$ puis $f(e_1), f(e_2), \dots, f(e_{n-1})$ étant choisis restent $p-(n-1) = p-n+1$ possibilités $f(e_n)$.

On a donc en tout : $p \times (p-1) \times (p-2) \times \ldots \times (p-n+1) = \dfrac{p!}{(p-n)!}$

Finalement le nombre de fonction injective est donc $\boxed{A_n^p = \begin{cases} \dfrac{p!}{(p-n)!} & \text{si } p > n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$

Surjectives : Même raisonnement quasiment. On note $F = \{f_1, \dots, f_p\}$.

1er cas : Si $p > n$ alors il n'y a pas d'application injective de E vers F.

2e cas : Si $p \leq n$ alors on a pour f_1, n possibilités d'antécédents parmi les éléments de E

puis l'antécédent de f_1 étant choisi restent $n-1$ possibilités pour l'antécédent de f_2 doit être différent de celui de f_1.

puis les antécédents de f_1 et f_2 étant choisi restent $n-2$ possibilités pour celui de f_3.

$\cdots$ puis les antécédants de $f_1, f_2, \dots, f_{p-1}$ étant choisis restent $n-(p-1) = n-p+1$ possibilités $f(e_p)$.

Attention ! Ces critères étant remplis, la fonction sera alors surjective, mais plusieurs fonctions vérifient ces critères : Nous n'avons défini l'image de la fonction que sur p éléments de E : les p antécédents que nous avons choisis.

Les autres éléments de E sont libres d'être associés à n'importe quelle valeur, cela donne donc en tout $n-p$ éléments à qui on associe des valeurs parmi p possibles : p^{n-p} choix. On a donc en tout : $n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times (n-p+1) \times p^{n-p} = \dfrac{n!p^{n-p}}{(n-p)!}$ possibilités pour la fonction surjective

Finalement le nombre de fonction injective est donc $\boxed{A_p^n p^{n-p} = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-p)!}p^{n-p} & \text{si } n > p \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$

Exercice 7 : ★★ Combien existe-t-il d'anagrames du mot "abracadabra" ?

Remarque : un anagrame est un mot contenant les exactement mêmes lettres dans le même nombre, par exemple aaaaabbcdrr est un anagrame possible

....

Réponses : **1)** Remarquons déjà qu'il y a 7 lettres dans le mot "bonjour". si touts les lettres étaient différentes, il y aurait autant d'anagrames que de permutations des lettres c'est à dire 7!.

Cependant en comptant ainsi, deux fois comptons plusieurs fois de nombreux mots. Par exemple *bonjonr* est compté quatre fois : bo^1njo^2ur et bo^2njo^1ur. C'est la même chose pour tous anagrammes. On a donc en tout $\boxed{\dfrac{7!}{2} = 2520}$ anagrammes de "bonjour".

2) Pour abracadabra, le principe est le même nous aurions 11 ! permutations avec 11 lettres différentes mais là encore il faut supprimer les doublons : une fois que les lettres sont placées, par exemple sur "abracadabra" n'importe quelle permutation des "a" donne le même anagrame, de même pur les permutations des "r" et des "b" on a donc $4! \times 2! \times 2!$ permutations possibles qui donneront le même anagramme "abracadabra". Ceci étant vrai pour chaque anagramme, on obtient en tout : $\dfrac{11!}{4! \times 2! \times 2!} = 11 \times 10 \times 9 \times 2 \times 7 \times 6 \times 5 = \boxed{415800}$ anagrammes.

Combinaisons

Exercice 8 : Soient $m, n, p \in \mathbb{N}$. A l'aide d'arguments,de dénombrements, montrer la formule suivante :

$$\sum_{k=1}^{n+m} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k} = \binom{n+m}{p}$$

....

Réponses : Pour choisir p éléments parmi $m+n$ revient à en choisir k parmi m puis $p-k$ parmi n, et ce pour toutes les valeurs de k possibles.

Si on pose $E = F \cup G$ où $|F| = n$ et $|G| = m$ avec $F \cap G = \emptyset$. On a une bijection :

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}_p(E) & \rightarrow & \displaystyle\bigcup_{k=0}^{p} \mathcal{P}_k(F) \times \mathcal{P}_{p-k}(G) \\ A & \mapsto & (A \cap F, A \cap G) \end{array}$$

Il est facile de prouver que Φ est bijective, notamment car il existe une réciproque $\Phi^{-1}(A, B) = A \cup B$.

Et donc $\dbinom{n+m}{p} = |\mathcal{P}_p(E)| = \left| \displaystyle\bigcup_{k=0}^{p} \mathcal{P}_k(F) \times \mathcal{P}_{p-k}(G) \right| = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} |\mathcal{P}_k(F)||\mathcal{P}_{p-k}(G)| = \sum_{k=1}^{n+m} \binom{n}{k}\binom{m}{p-k}$

Exercice 9 : Prouver les formules classiques suivantes à l'aide d'un raisonnement combinatoire :

1) $\dbinom{n}{p} + \dbinom{n}{p-1} = \dbinom{n+1}{p}$ **2)** $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$ **3)** $(x+y)^n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

....

Réponses : **1)** $\dbinom{n}{p} + \dbinom{n}{p-1} = \dbinom{n+1}{p}$

Piocher p éléments parmi $n+1$ revient à tirer p élément parmi les n premiers ou à tirer le $n+1$ élément et $p-1$ parmi les n premiers.

Pour le démontrer proprement c'est moins facile. On pose E un ensemble de cardinal $n+1$ et $F \subset E$ de cardinal n. On note $E \backslash F = \{e\}$ on pose $G = \{\{e\} \cup A \mid A \in \mathcal{P}_{p-1}(F)\}$.

On a alors $\mathcal{P}_p(E) = \mathcal{P}_p(F) \cup G$, en effet,

$\boxed{\subset}$ $\mathcal{P}_p(F) \subset \mathcal{P}_p(E)$ et $G \subset \mathcal{P}_p(E)$ car ces ensembles contiennent des parties de E à p éléments.

$\boxed{\supset}$ Si $B \in \mathcal{P}_p(E)$ alors soit $B \subset F$ on a alors $B \in \mathcal{P}_p(F)$. Sinon on a $B = \{e\} \cup A$ où $A \in \mathcal{P}_{p-1}(F)$ donc $B \in G$. Dans tous les cas on a donc $B \in \mathcal{P}_p(F) \cup G$. Et comme $\mathcal{P}_p(F) \cap G = \emptyset$ on a :

$|\mathcal{P}_p(E)| = |\mathcal{P}_p(F)| + |G|$. On calcule le cardinal de G :

On a une bijection $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{P}_{p-1}(F) & \rightarrow & G \\ A & \mapsto & \{e\} \cup A \end{array}$

On peut vérifier rapidement que Φ est une bijection car $\Phi^{-1}(B) = B \cap F$

Ainsi $|G| = |\mathcal{P}_{p-1}(F)| = \dbinom{n}{p-1}$ et on obtient : $|\mathcal{P}_p(E)| = |\mathcal{P}_p(F)| + |G| \iff \boxed{\dbinom{n+1}{p} = \dbinom{n}{p} + \dbinom{n}{p-1}}$

2) $\displaystyle\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n$.

Soit E un ensemble de cardinal n. On a $\mathcal{P}(E) = \cup_{p=0}^{n} \mathcal{P}_p(E)$. Cette union est disjointe car si $A \in \mathcal{P}_i(E) \cap \mathcal{P}_j(E)$ alors $|A| = i = j$. Donc $i \neq j \implies \mathcal{P}_i(E) \cap \mathcal{P}_j(E) = \emptyset$.

Par conséquent $|\mathcal{P}(E)| = \sum_{k=0}^{n} |\mathcal{P}_p(E)| \iff \boxed{2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}}$

3) $(x+y)^n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$ On a $(x+y)^n = \underbrace{(x+y)}_{1}\underbrace{(x+y)}_{2}\dots\underbrace{(x+y)}_{n}$. Pour obtenir le coefficient $x^k y^{n-k}$, il faut distribuer le produit et choisir k couples $(x+y)$ parmi les n possibles. Il y a donc $\binom{n}{k}$ possibilités et on les ajoute, ce qui explique le coefficient binomial devant $x^k y^{n-k}$.

<u>Exercice 10</u> : Un magasin propose des billes de 4 couleurs différentes. Donner le nombre de façons de remplir un sac avec 20 billes.

. . . .

Réponses : Pas facile. Donnons un nom aux couleurs : R, V, J, B (rouge, vert, jaune, bleu).
Considèrons es cas particulier plus simples.

(1) <u>Une couleur</u> : Si on se demande combien de paquets différents comportent n billes de couleur R uniquement, il n'en existe qu'un seul pour tout n.

(2) <u>Deux couleurs</u> : Si on se demande combien de paquets comportant n billes on peut former avec deux couleurs R, V alors : Si on fixe $k \in [\![0,n]\!]$ billes V, alors on doit former un paquet de $n-k$ billes R, ce qui nous laisse une unique possiblités. On a donc autant de paquets que de nombre de billes V différents possibles. Cela fait $\boxed{n+1}$ possibilités.

(3) <u>Trois couleurs</u> : Si on se demande combien de paquets comportant n billes on peut former avec trois couleurs R, V, J alors : Si on fixe $k \in [\![0,n]\!]$ billes J, alors on doit former un paquet de $n-k$ billes avec les couleurs R et V ce qui nous laisse $n-k+1$ possibilités.

Le nombre de possibilités est donc $\sum_{k=0}^{n} n-k+1 = \sum_{k=0}^{n} k+1 = \boxed{\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}}$

(4) <u>Quatre couleurs</u> : Si on se demande combien de paquets comportant n billes on peut former avec quatre couleurs R, V, J, B alors : Si on fixe $k \in [\![0,n]\!]$ billes B, alors on doit former un paquet de $n-k$ billes avec les couleurs R, V et J ce qui nous laisse $\dfrac{(n-k+1)(n-k+2)}{2}$ possibilités.

Le nombre de possibilités est donc $\sum_{k=0}^{n} \dfrac{(n-k+1)(n-k+2)}{2} = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(k+1)(k+2)}{2} = \sum_{k=1}^{n+1} \dfrac{k(k+1)}{2}$

$= \dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n+1} k^2 + k = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \dfrac{n(n+1)}{2}\right) = \dfrac{n(n+1)}{12}(2n+1+3) = \boxed{\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}}$

Si la question s'arrêtait à 4 couleurs, il resterait à remplacer par $n = 20$. On obtient : $\dfrac{20 \cdot 21 \cdot 22}{6} = 10 \cdot 7 \cdot 22 = \boxed{1540}$. Mais pour notre plus grand plaisir, on rajoute encore une couleur :

(4) <u>Cinq couleurs</u> : Si on se demande combien de paquets comportant n billes on peut former avec quatre couleurs M, R, V, J, B alors : Si on fixe $k \in [\![0,n]\!]$ billes M, alors on doit former un paquet de $n-k$ billes avec les couleurs R, V et J ce qui nous laisse $\dfrac{(n-k+1)(n-k+2)}{2}$ possibilités.

Le nombre de possibilités est donc :

$\sum_{k=0}^{n} \dfrac{(n-k)((n-k)+1)((n-k)+2)}{6} = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{k(k+1)(k+2)}{6} = \dfrac{1}{6}\sum_{k=1}^{n+1} k^3 + 3k^2 + 2k$

$= \dfrac{1}{6}\left(\dfrac{n^2(n+1)^2}{4} + \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{2} + n(n+1)\right) = \dfrac{n(n+1)}{6}\dfrac{n^2+n+4n+2+4}{4} = \dfrac{n(n+1)(n^2+5n+6)}{12}$

$\boxed{= \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{12}}$

Finalement pour $n = 20$ on trouve $\frac{20 \cdot 21 \cdot 22 \cdot 23}{12} = \boxed{17710}$ possibilités
Ne seriez vous pas tenté.e de compter pour 6 couleurs ? :-)

Exercice 11 : On tire successivement 5 boules dans une urne contenant 10 boules blanches et 5 boules noires (sans remise).
1) Combien y a-t-il de tirages au total ?
2) Combien y a-t-il de tirages avec au moins une boule noire ?

. . . .

Réponses : **1)** Combien y a-t-il de tirages au total : $\boxed{\binom{15}{5}}$

2) On fait le nombre de tirage total moins le nombre de tirages sans noire $\boxed{\binom{15}{5} - \binom{10}{5}}$

Exercice 12 : On tire une main de 5 cartes d'un jeu de 52 cartes. Combien y a-t-il de mains :
1) avec au moins une dame ? **2)** avec au plus une dame ? **3)** Avec la dame de coeur ?
4) Dont toutes les cartes sont de la même couleur ? ($\clubsuit, \spadesuit, \heartsuit, \diamondsuit$) **5)** Avec une suite ?
6) Avec un carré (quatre cartes pareilles) ? **7)** Avec un Brelan (exactement 3 cartes pareilles) ?

. . . .

Réponses : **1)** avec au moins une dame : $\boxed{\binom{52}{5} - \binom{48}{5}}$ **2)** avec au plus une dame : $\boxed{4 \cdot \binom{48}{4} + \binom{48}{5}}$

3) Avec la dame de coeur : $\boxed{\binom{51}{4}}$ **4)** Dont toutes les cartes sont de la même couleur : $\boxed{4\binom{13}{5}}$

5) Avec une suite : $\boxed{9 \cdot 4^5}$ (neuf suites possibles et pour chaque suite on a quatre couleurs possibles pour chaque carte qui la compose)

6) Avec un carré : $\boxed{13 \cdot 48}$ **7)** Avec un Brelan : $\boxed{13 \cdot 4 \cdot \binom{48}{2}}$ (le 4 vient de $\binom{3}{4}$ manières possibles de composer un brelan d'une valeur donnée (il existe 4 brelans d'as différents par exemple)).

Exercice 13 : Des cartes de poker sont disposées sur la table :

$$5\clubsuit \quad R\spadesuit \quad Q\heartsuit$$

J'ai un superbe Brelan de rois avec mes deux cartes en main $R\clubsuit \quad R\diamondsuit$. Cependant, selon ce qui va arriver, de nombreuses configurations peuvent me faire perdre.

1) Dans un premier temps calculons le nombre de configurations totales pour un adversaire. Sachant que un adversaire a deux cartes et que deux cartes vont encore être disposées sur la table, combien y a-t-il de configurations possibles à la fin pour l'adversaire ?
2) Quinte flush : calculer le nombre de possibilités pour qu'un adversaire puisse aligner cinq cartes consécutives de même couleur dans cette configuration.
3) Carré : Un carré consiste à avoir 4 cartes pareilles. Calculer le nombre de possibilités pour qu'un adversaire ait un carré meilleur que mon jeu dans cette configuration.
4) Full : Un full consiste à avoir un brelan et une paire. Calculer le nombre de possibilités qui donnent à l'adversaire un full meilleur que mon jeu.
5) Couleur : Une couleur consiste à avoir 5 cartes avec le même symbole. Calculer le nombre de possibilités pour qu'un adversaire me batte avec une couleur.
6) Quinte : Une quinte consiste à avoir 5 cartes consécutives. Calculer le nombre de possibilités pour qu'un adversaire me batte avec une quinte.
7) Conclusion : compter le nombre total de configuration qui me font perdre. Ai-je plus de chances de gagner ou de perdre ?

. . . .

Réponses : Remarque : C'est très compliqué et j'ai dû le rédiger vite, il y a donc des chances très élevées pour que mes raisonnements soient faux sur certains points, n'hésitez pas à m'envoyer un mail pour me prévenir

d'une erreur.
1) Le jeu possède 52 cartes, dont 5 sont déjà disposées. On distingue les cartes de la tables des cartes de la main de l'adversaire. On en tire deux d'abords sur la table, puis dans la main de l'adversaire

On obtient : $\boxed{\binom{47}{2}\binom{45}{2} = 1\ 070\ 190 \text{ possiblités.}}$

2) On a plusieurs possibilités de cartes parmi les 2 de l'adversaires et celles sur la table :
<u>Pique</u> ($A\spadesuit$ $Q\spadesuit$ $V\spadesuit$ $10\spadesuit$), soit ($Q\spadesuit$ $V\spadesuit$ $10\spadesuit$ $9\spadesuit$) Ca fait $2\binom{4}{2} = 2 \cdot 6 = 12$. <u>Trefle</u> : On en a $4 \cdot \binom{4}{2} = 24$. <u>Coeur</u> : On en a $3 \cdot \binom{4}{2} = 18$. <u>Carreau</u> : On en a 0. Donc $\boxed{12+18+24= 54 \text{ possibilités}}$.

3) Pour avoir un carré, il faudrait (*)Soit piocher 4 cartes parmi celles qui ne sont pas sorties : autant de possibilités que de cartes non sorties (2,3,4,6,7,8,9,10,V,A) donc $10\binom{4}{2} = 60$. (*) Soit en tirer trois parmi celles qui sont sorties (5 et Q, pas le R pour lequel c'est impossible)
- Donc $2 \cdot \binom{3}{2}$ parmi les cartes sur la table et une liberté de 44 cartes possibles avec la dame dans la main dans la main
- Ou $2 \cdot \binom{3}{2}$ parmi les cartes dans la main, reste une liberté de 43 cartes à poser sur la table pour gagner(le Roi de coeur fait perdre).

Cela donne $2 \cdot \binom{3}{2}(43 + 44) = 522$ possibilités. Au final $\boxed{60 + 522 = 582}$ possibilités.

4) Plus compliqué. (*) Déjà comptons les fulls aux as qui font gagner mon adversaire. Pour que cela arrive, il faut tirer 3 As et une carte parmi R, Q et 5 (7 cartes) Leur position n'a pas d'importance sur le plateau. Donc $\binom{4}{3}\binom{7}{1}\binom{4}{2} = 168$ configurations.
(*) Si on ne compte pas le full à l'as, alors il faut penser maintenant que le dernier Roi ne peut pas apparaitre sur la table, sinon nous gagnons. Deux manières de gagner : - un brelan D ou 5 + une paire. Faisons pour D (c'est la même chose pour 5) on tire 2 dames parmi les trois avec soit 2 cartes parmi les 10 restantes OU un 5 et n'importe quoi d'autre OU un R dans la main et n'importe quoi d'autre : $2 \cdot \binom{3}{2}(10\binom{4}{2}\binom{4}{2} + 3 \cdot (44\binom{3}{2} + 43\binom{3}{1}) + 44\binom{4}{2}) - \binom{3}{2}^2\binom{4}{2} = 8388$. Remarque, j'ôte $\binom{3}{2}^2\binom{4}{2}$ car dans ces configurations nous comptons deux fois la possibilité d'obtenir une paire de Q et de 5 en même temps.
- Maintenant on peut avoir un nouveau brelan plus 5 ou D ou R (dans la main). Cela fait 9 brelans possibles (on a déjà compté l'As) cela fait $9\binom{4}{3}\left(\binom{6}{1}\binom{4}{2} + \binom{7}{1}\binom{3}{2}\right) = 2052$

Finalement on obtient $\boxed{8388 + 2052 + 168 = 10\ 608 \text{ possibilités}}$
Remarquons déjà que si on tire une paire sur la table, (Q ou 5 -> 6 cartes) j'ai un full au roi ce qui me fait gagner, sauf si l'adversaire a un full aux As (4 combinaisons d'as possibles). Cela donne $(6 + 6) \cdot 4 = 24$ configurations.
Sinon, on ne tire pas Q ou 5, donc on tire parmi 41 cartes.
5) Pour que l'adversaire l'emporte avec une couleur, il suffit de tirer 4 cartes de la même couleur $\spadesuit$, $\heartsuit$, $\clubsuit$. On a une possibilité de moins en trèfle car nous avons le Roi de trèfle en main.

Cela donne $\boxed{2\binom{12}{2}\binom{10}{2} + \binom{11}{2}\binom{9}{2} = 7920 \text{ possibilités}}$

6) Il y a plusieurs quinte possibles : - Au 5 : 4 suites possibles, on a besoin de piocher 4 nombres consécutifs dont les 4 couleurs sont dispo donc il faut une carte parmi chacune $4 \cdot \binom{4}{1}^4 \cdot \binom{4}{2} = 6144$
- A la dame et au roi : Il y a deux suites possibles et pour chaque suite on n'a besoin que de 3 nombres dont toutes les couleurs sont dispo donc $2 \cdot \binom{4}{1}^3 \cdot (44 * \binom{3}{2} + 43 \cdot \binom{3}{1}) = 33408$

Cela donne $\boxed{33408 + 6144 = 39552 \text{ possibilités}}$

7) Reste à compter le nombre de possibilités d'avoir un brelan d'As. On pioche 3 As et le reste doit être différent de 5 ou D ou R. Cela fait donc $\binom{4}{3} \cdot (44-7) \cdot \binom{4}{2} = 888$. Au final, on a beaucoup de chances de gagner, la probabilité que l'on perde est la suivante : $\boxed{\dfrac{54+582+10608+7920+39552}{1070190} = 0.05486...}$.
