TD - Systèmes et Matrices

1BCPST 2 — Feuille d'exercice — Année 2023- 2024

Systèmes

Exercice 1 : ♡ *(En 1-2 minute)* : Résoudre les systèmes suivants et donner leurs rangs :

1) $\begin{cases} x+y=2 \\ -x+y=1 \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} x+y=2 \\ -2x-2y=6 \end{cases}$ **3)** $\begin{cases} 2x+3y=10 \\ -3x+5y=2 \end{cases}$ **4)** $\begin{cases} x+y=0 \\ x-z=1 \end{cases}$ **5)** $\begin{cases} 2x+3y+t=3 \\ 3x+4y-z=2 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y+2z=2 \\ x+z=1 \end{cases}$ **7)** $\begin{cases} x+z=1 \\ 2x+y=2 \\ x+y-z=0 \end{cases}$ **8)** $\begin{cases} x+2y+3z=12 \\ y+2z=5 \\ z=2 \end{cases}$ **9)** $\begin{cases} x-y+2z=1 \\ x+y-3z=1 \\ x-z=2 \end{cases}$

Exercice 2 : ★ - ★★ *(Autres systèmes)* : Résoudre les systèmes suivants et donner leurs rangs :

1) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+y=1 \\ \dfrac{y}{4}+z=\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{2x}{7}+z=1 \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} x+y=i \\ x+y+iz=1 \\ ix-y+z=1+i \end{cases}$ **3)** $\begin{cases} \sqrt{2}x+y=\sqrt{2} \\ x+\sqrt{3}y-2\sqrt{3}z=0 \\ \sqrt{10}x-y+z=\sqrt{5} \end{cases}$ **4)** $\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ x-y+z-t=1 \\ 2x+y-3z+t=3 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x+2y-z+t+w=1 \\ x+y-z-t-w=2 \\ x+y-w=-1 \end{cases}$ **6)** $\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ -x+y+z+t=1 \\ -2y+z+t=1 \\ 3z-t=1 \end{cases}$ **7)** $\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ -x+y+z+t=1 \\ -2y+z+t=1 \\ 3z-t=1 \end{cases}$

Exercice 3 : ★★ *(Avec des paramètres)* : Résoudre les systèmes suivants et donner le rang en fonction des paramètres :

1) $\begin{cases} x+y+(1-m)z=m+2 \\ (1+m)x-y+2z=0 \\ 2x-my+3z=m+2 \end{cases}$ où $m\in\mathbb{R}$ **2)** $\begin{cases} ax+by+z=1 \\ x+aby+z=b \\ x+by+az=1 \end{cases}$ où $a,b\in\mathbb{R}$

Matrices

Exercice 4 : ♡ *(En 1 minute)* : On définit les matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 6 & 5 & 0 \end{pmatrix};\ C=\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix};\ D=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix};\ E=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{n,2}(\mathbb{R});\ F=\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & I_3 \end{pmatrix}$$

Calculer les produits matriciels suivants (s'ils ont un sens) et préciser si la matrice obtenue est symétrique :

1) AB **2)** BA **3)** A^tB **4)** A^2 **5)** ${}^tAA$ **6)** A^3 **7)** B^2 **8)** ${}^tBB$ **9)** B^tB **10)** BC
11) DC **12)** BD **13)** D^2 **14)** ${}^tCB$ **15)** EA **16)** A^tE **17)** EB **18)** F^2 **19)** ${}^tFF$.

Exercice 5 : ♡ - ★ *(Rang)* Calculer le rang des matrices suivantes :

1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ **2)** $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ **3)** $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ **4)** $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 8 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ **5)** $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & -3 & 8 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 8 & 7 \\ -2 & 4 & -10 & -16 & -14 \end{pmatrix}$ **7)** $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 & 3 & 8 \\ -1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **8)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & 8 & -3 \\ 2 & -8 & -1 & -6 \\ -2 & -4 & -6 & -2 \end{pmatrix}$ **9)** $\begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 8 & 2 \\ 4 & 7 & -3 & 2 \\ -1 & 14 & -13 & 7 \end{pmatrix}$

Exercice 6 : ★ *(Trace)* Si $M\in\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la somme de ses coefficients diagonaux est appelée "Trace de M" :

$$\mathrm{Tr}(M)=\sum_{i=1}^{n} m_{i,i}$$

1) Montrer que $\mathrm{Tr}(A+\lambda B)=\mathrm{Tr}(A)+\lambda\mathrm{Tr}(B)$ et $\mathrm{Tr}({}^tM)=\mathrm{Tr}(M)$.
2) Montrer que $\mathrm{Tr}(AB)=\mathrm{Tr}(BA)$

Exercice 7 : ★★ Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
Montrer qu'il existe un unique couple $(S, A) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ tel que $M = S + A$.

Exercice 8 : ★★ : Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1 : $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

1) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer J^k. **2)** Calculer $(I_n + J)^k$
3) trouver une matrice R telle que $R^2 = J$
4) Plus généralement pour $k \in \mathbb{N}^*$, trouver une matrice R telle que $R^k = J$.

Inverse

Exercice 9 : ♡ *(En 1 minute)* Dire si ces matrices sont inversibles et si oui calculer leur inverse :

1) $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ **2)** $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **3)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ **4)** $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ **5)** $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 5 & 9 & 1 \end{pmatrix}$ **6)** $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ **8)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **9)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **10)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **11)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$

Exercice 10 : ★ - ★★ *(Calcul d'inverse)* Inverser les matrices suivantes :

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **2)** $\begin{pmatrix} -5 & 10 & 15 \\ 5 & 15 & 10 \\ 10 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ **3)** $\begin{pmatrix} 1/4 & -1/2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$ **4)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 2\sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -2\sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & \sqrt{3} & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ **6)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **7)** $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$

Exercice 11 : ★★ Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible et calculer son inverse.

Exercice 12 : ★★ *(Matrices de rotation)* On pose $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

1) Montrer que $R_\theta R_{\theta'} = R_\varphi$ avec φ qu'on exprimera en fonction de θ et θ'.
2) En déduire que pour toutθ et θ', les matrices R_θ et $R_{\theta'}$ commutent.
3) Montrer que $R_\theta \in GL_n(\mathbb{R})$ et $R_\theta^{-1} = R_\varphi$ avec φ qu'on précisera.
4) Soit $z = x + iy$ un nombre complexe. On pose $z' = x' + iy'$ avec $X' = R_\theta X$.
Exprimer Z' en fonction de z et θ.
5) Interpréter graphiquement la transformation opérée aux coordonnées de X après l'opération $X' = R_\theta X$.
Réinterpréter les résultats 1)2) et 3) à l'aune de ces constats.

Exercice 13 : ★★ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que $A - I_n$ est inversible. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} A^k = (A - I_n)^{-1} \cdot (A^{n+1} - I_n)$$

.