TD - Systèmes et Matrices - Corrigé

1BCPST 2 Feuille d'exercice Année 2023- 2024

Systèmes

Exercice 1 : *(En 1 minute)* : Résoudre les systèmes suivants et donner leurs rangs :

1) $\begin{cases} x+y=2 \\ -x+y=1 \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} x+y=2 \\ -2x-2y=6 \end{cases}$ **3)** $\begin{cases} 2x+3y=10 \\ -3x+5y=2 \end{cases}$ **4)** $\begin{cases} x+y=0 \\ x-z=1 \end{cases}$ **5)** $\begin{cases} 2x+3y+t=3 \\ 3x+4y-z=2 \end{cases}$

6) $\begin{cases} x+y+z=1 \\ 2x+y+2z=2 \\ x+z=1 \end{cases}$ **7)** $\begin{cases} x+z=1 \\ 2x+y=2 \\ x+y-z=0 \end{cases}$ **8)** $\begin{cases} x+2y+3z=12 \\ y+2z=5 \\ z=2 \end{cases}$ **9)** $\begin{cases} x-y+2z=1 \\ x+y-3z=1 \\ x-z=2 \end{cases}$

. . . .

Réponses : **1)** $x=\dfrac{1}{2}$ et $y=\dfrac{3}{2}$; rang 2 **2)** pas de solution ; rang 1 **3)** $x=\dfrac{44}{19}$ et $y=\dfrac{34}{19}$; rang 2
4) $x=1+z$ et $y=-1-z$; rang 2 **5)** $z=-2+3x+4y$ et $t=3-2x-3y$: rang 2
6) $x=1-z$ et $y=0$: rang 2 **7)** pas de solution ; rang 2 **8)** $x=4$, $y=1$ et $z=2$; rang 3
9) $x=0$, $y=-5$ et $z=-2$; rang 3

Exercice 2 : *(Autres systèmes)* : Résoudre les systèmes suivants et donner leurs rangs :

1) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+y=1 \\ \dfrac{y}{4}+z=\dfrac{1}{3} \\ \dfrac{2x}{7}+z=1 \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} x+y=i \\ x+y+iz=1 \\ ix-y+z=1+i \end{cases}$ **3)** $\begin{cases} \sqrt{2}x+y=1 \\ x+\sqrt{2}y-2\sqrt{3}z=0 \\ \sqrt{10}x-y+z=\sqrt{5} \end{cases} \iff$ **4)** $\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ x-y+z-t=1 \\ 2x+y-3z+t=3 \end{cases}$

5) $\begin{cases} x+2y-z+t+w=1 \\ x+y-z-t-w=2 \\ x+y-w=-1 \end{cases}$ **6)** $\begin{cases} x+y+z+t=1 \\ -x+y+z+t=1 \\ -2y+z+t=1 \\ 3z-t=1 \end{cases}$ **7)** $\begin{cases} x+2y+3z-t+w=2 \\ x-y+z+t-2w=4 \\ x+2y+z+t-w=-1 \\ x+2y-2z+t+3w=2 \end{cases}$

. . . .

Réponses : **1)** On réécrit le système (rang 3) : $\begin{cases} x+2y=2 \\ 3y+12z=4 \\ 2x+7z=7 \end{cases} \iff \begin{cases} x+2y=2 \\ 3y+12z=4 \\ -4y+7z=3 \end{cases} \iff \begin{cases} x+2y=2 \\ 3y+12z=4 \\ -y+19z=7 \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} x+2y=2 \\ y-19z=-7 \\ 69z=25 \end{cases} \iff \boxed{\begin{cases} x=\dfrac{154}{69} \\ y=\dfrac{-8}{69} \\ z=\dfrac{25}{69} \end{cases}}$$

2) $\begin{cases} x+y=i \\ x+y+iz=1 \\ ix-y+z=1+i \end{cases} \iff \begin{cases} x+y=i \\ iz=1-i \\ (-1-i)y+z=2+i \end{cases} \iff \begin{cases} x+y=i \\ (-1-i)y+z=2+i \\ z=\dfrac{1-i}{i}=-1-i \end{cases}$

$$\iff \begin{cases} x+y=i \\ (-1-i)y=3+2i \\ z=-1-i \end{cases} \iff \begin{cases} x+y=i \\ y=-\dfrac{3+2i}{1+i}=-\dfrac{-1-i}{2}=\dfrac{1+i}{2} \\ z=-1-i \end{cases} \iff \boxed{\begin{cases} x=\dfrac{-1+i}{2} \\ y=\dfrac{1+i}{2} \\ z=-1-i \end{cases}}$$

3) $\begin{cases} \sqrt{2}x+y=1 \\ x+\sqrt{2}y-2\sqrt{3}z=0 \\ \sqrt{10}x-y+z=\sqrt{5} \end{cases} \iff \begin{cases} \sqrt{2}x+y=1 \\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}y-2\sqrt{3}z=\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ -(1+\sqrt{5})y+z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} \sqrt{2}x+y=1 \\ y-2\sqrt{6}z=1 \\ -(1+\sqrt{5})y+z=0 \end{cases} \iff$

$$\left\{\begin{array}{l}\sqrt{2}x+y=1\\(1+2\sqrt{6}(1+\sqrt{5}))y=1\\-(1+\sqrt{5})y+z=0\end{array}\right. \iff \boxed{\left\{\begin{array}{l}x=1-\dfrac{1}{\sqrt{2}+4\sqrt{3}+2\sqrt{15}}\\y=\dfrac{1}{1+2\sqrt{6}+\sqrt{30}}\\z=\dfrac{1+\sqrt{5}}{1+2\sqrt{6}+\sqrt{30}}\end{array}\right.} \text{ rang } 3$$

4) $$\left\{\begin{array}{l}x+y+z+t=1\\x-y+z-t=1\\2x+y-3z+t=3\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}x+y+z+t=1\\-2y-2t=2\\-y-5z-t=1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}x+y+z+t=1\\y+t=1\\-5z=1\end{array}\right. \iff \boxed{\left\{\begin{array}{l}x=\dfrac{6}{5}\\y=1-t\\z=\dfrac{-1}{5}\end{array}\right.}$$

Rang 3

5) $$\left\{\begin{array}{l}x+2y-z+t+w=1\\x+y-z-t-w=2\\x+y-w=-1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}x+2y-z+t+w=1\\-y-2t-2w=1\\x+y-w=-1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}z=-1+t+w+x+2y\\y=-1-2t-2w\\x=-1-y+w\end{array}\right. \iff$$

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l}z=-3-t\\y=-1-2t-2w\\x=2t+3w\end{array}\right.} \text{ Rang } 3$$

6) $$\left\{\begin{array}{l}x+y+z+t=1\\-x+y+z+t=1\\-2y+z+t=1\\3z-t=1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}x+y+z+t=1\\2y+2z+2t=2\\-2y+z+t=1\\3z-t=1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}x+y+z+t=1\\y+z+t=1\\3z+3t=3\\3z-t=1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}x+y+z+t=1\\y+z+t=1\\z+t=1\\4t=2\end{array}\right. \iff$$

$$\left\{\begin{array}{l}x+y+z+t=1\\y+z+t=1\\z+t=1\\t=\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \iff \boxed{\left\{\begin{array}{l}x=0\\y=0\\z=\dfrac{1}{2}\\t=\dfrac{1}{2}\end{array}\right.} \text{ Rang } 4$$

7) $$\left\{\begin{array}{l}x+2y+3z-t+w=2\\x-y+z+t-2w=4\\x+2y+z+t-w=-1\\x+2y-2z+t+3w=2\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}x+2y+3z-t+w=2\\-3y-2z+2t-3w=2\\-2z+2t-2w=-3\\-5z+2t+2w=0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}x+2y+3z-t+w=2\\-3y-2z+2t-3w=2\\-2z+2t-2w=-3\\-3z+4w=3\end{array}\right.$$

$$\iff \left\{\begin{array}{l}x=2-2y-3z+t-w\\3y=-2-2z-5+-3w\\t=-\dfrac{3}{2}+w+z\\z=\dfrac{4}{3}w-1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}x=2-2y-3z+t-w\\3y=-2+2-\dfrac{8}{3}w-5+\dfrac{14}{3}w-3w\\t=-\dfrac{5}{2}+\dfrac{7}{3}w\\z=\dfrac{4}{3}w-1\end{array}\right. \iff \boxed{\left\{\begin{array}{l}x=\dfrac{35}{6}-2w\\y=\dfrac{-5}{3}+\dfrac{1}{3}w\\t=\dfrac{-5}{2}+\dfrac{7}{3}w\\z=\dfrac{4}{3}w-1\end{array}\right.}$$

(rang 4).

Exercice 3 : ★★ - ★★★ *(Avec des paramètres)* : Résoudre les systèmes suivants et donner le rang en fonction des paramètres :

1) $\left\{\begin{array}{l}mx+y-z=1\\x-my+z=m^2\\2x+y+z=(m+1)^2\end{array}\right.$ où $m\in\mathbb{R}$ **2)** $\left\{\begin{array}{l}x+y+(1-m)z=m+2\\(1+m)x-y+2z=0\\2x-my+3z=m+2\end{array}\right.$ où $m\in\mathbb{R}$

3) $\left\{\begin{array}{l}ax+by+z=1\\x+aby+z=b\\x+by+az=1\end{array}\right.$ où $a,b\in\mathbb{R}$

. . . .

Réponses : **1)** $$\left\{\begin{array}{l}mx+y-z=1\\x-my+z=m^2\\2x+y+z=(m+1)^2\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ll}mx+y-z=1&\\(m+1)x+(1-m)y=m^2+1&(L_2+L1)\\(2+m)x+2y=(m+1)^2+1&(L_3+L_1)\end{array}\right.$$

$$\iff \begin{cases} mx+y-z=1 \\ (m+1)x+(1-m)y=m^2+1 \\ x+(m-1)y=(m+1)^2-m^2 \quad (L_3-L_2) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} mx+y-z=1 \\ x+(m+1)y=2m+1 & (L_3) \\ (1-m-(m+1)^2)y=m^2+1-(2m+1)(m+1) & (L_2-(m+1)L_3) \end{cases}$$

$\iff \begin{cases} mx+y-z=1 \\ x+(m+1)y=2m+1 \\ (m^2-3m)y=m^2-3m \end{cases}$ On observe donc des cas distincts : si $m^2-3m=0 \iff m=0$ ou $m=-3$ alors le système sera de rang 2, sinon il est de rang 3. On résout :

Cas $m=0$: $\begin{cases} y-z=1 \\ x+y=1 \\ 0=0 \end{cases} \iff \begin{cases} z=y-1 \\ x=1-y \end{cases}$ Donc $S=\{(1-y,y,y-1) \mid y\in\mathbb{R}\}$

Cas $m=3$: $\begin{cases} 3x+y-z=1 \\ x+4y=7 \\ 0=0 \end{cases} \iff \begin{cases} z=3x+y-1=21-12y+y-1=20-11y \\ x=7-4y \\ 0=0 \end{cases}$

Donc $S=\{(7-4y,y,20-11y) \mid y\in\mathbb{R}\}$

Cas $m\neq 0$ et $m\neq 3$: $\begin{cases} mx+y-z=1 \\ x+(m+1)y=2m+1 \\ (m^2-3m)y=m^2-3m \end{cases} \iff \begin{cases} z=1-mx-y=m^2 \\ x=2m+1-y=m \\ y=1 \end{cases}$ Donc $S=\{(m,1,m^2)\}$

On a donc $\boxed{S=\begin{cases} \{(m,1,m^2)\} & \text{si } m\neq 0 \text{ et } m\neq -3 \\ \{(1-y,y,y-1) \mid y\in\mathbb{R}\} & \text{si } m=0 \\ \{(7-4y,y,20-11y) \mid y\in\mathbb{R}\} & \text{si } m=-3 \end{cases}}$

2) $\begin{cases} x-y+(1-m)z=m+2 \\ (1+m)x-y+2z=0 \\ 2x-my+6z=m+2 \end{cases} \iff \begin{cases} x-y+(1-m)z=m+2 \\ my+(2-(1-m^2))z=-(m+1)(m+2) \\ -(m+2)y+(4+2m)z=-(m+2) \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x-y+(1-m)z=m+2 \\ my+(1+m^2)z=-(m+1)(m+2) \\ -y+2z=-1 \end{cases} (m+2\neq 0) \iff \begin{cases} x-y+(1-m)z=m+2 \\ y-2z=1 \\ (1+m^2+2m)z=-(m+1)(m+2)-m \end{cases} \iff$

$\begin{cases} x-y+(1-m)z=m+2 \\ y-2z=1 \\ z=\dfrac{m^2+4m+2}{(m+1)^2} \end{cases} (m+1\neq 0) \iff \boxed{\begin{cases} x=\dfrac{2m^3+10m^2+13m+5}{(m+1)^2} \\ y=\dfrac{3m^2+10m+5}{(m+1)^2} \\ z=\dfrac{m}{(m+1)^2} \end{cases}}$ Le rang vaut 3 si $m\neq -2$ et -1.

(*)Si $m=-2$ alors : $\begin{cases} x+y+3z=m+2 \\ my+(1+m^2)z=0 \\ -(m+2)y+(4+2m)z=-(m+2) \end{cases} \iff \begin{cases} x-y+3z=0 \\ -2y+5z=0 \\ 0=0 \end{cases} \iff \boxed{\begin{cases} x=\dfrac{-1}{2}z \\ y=\dfrac{5}{2}z \end{cases} \text{ si } m=-2}$

rang 2

(*)Si $m=-1$ alors : $\begin{cases} x-y+(1-m)z=m+2 \\ y-2z=1 \\ (m+1)^2z=-(m+1)(m+2)-m \end{cases} \iff \begin{cases} x-y+2z=1 \\ y-2z=1 \\ 0=1 \end{cases}$

Donc $\boxed{\text{pas de solution si } m=-1}$ et système de rang 2

3) $\begin{cases} ax+by+z=1 \\ x+aby+z=b \\ x+by+az=1 \end{cases} \iff \begin{cases} ax+by+z=1 \\ (1-a^2)x+(1-a)z=b-a \\ (1-a)x+(a-1)z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} ax+by+z=1 \\ (1-a^2)x+(1-a)z=b-a \\ x=z \end{cases} \iff$

$$\begin{cases} (a+1)x+by=1 \\ (2-a-a^2)x=b-a \\ x=z \end{cases} \iff \begin{cases} by=1-(a+1)x \\ x=\dfrac{b-a}{(a+2)(1-a)} \\ z=\dfrac{b-a}{(a+2)(1-a)} \end{cases} \iff \boxed{\begin{cases} y=\dfrac{ab+b-2}{(a+2)(a-1)b} \\ x=\dfrac{b-a}{(a+2)(1-a)} \\ z=\dfrac{b-a}{(a+2)(1-a)} \end{cases}} \text{ rang 3}$$

Ces solutions sont valables à conditions d'avoir $a \neq 1$, $a \neq -2$ et $b \neq 0$.

(*) Si $b=0$ $\begin{cases} ax+z=1 \\ x+z=0 \\ x+az=1 \end{cases} \iff \begin{cases} (a-1)x=1 \\ x=-z \\ (1-a)x=1 \end{cases} \iff \begin{cases} (a-1)x=1 \\ x=-z \\ 0=2(L_1+L_3) \end{cases}$ $\boxed{\text{pas de solution}}$. rang 2

(*) Si $a=1$ $\begin{cases} x+by+z=1 \\ x+by+z=b \\ x+by+z=1 \end{cases} \iff \begin{cases} x+by+z=1 \\ 0=b-1 \\ 0=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=1-y-z \\ b=1 \\ 0=0 \end{cases}$

$\boxed{\text{Si } b=1 \text{ alors } x=-y-z, \text{ sinon pas de solution}}$ rang 1.

(*) Si $a=-2$ $\begin{cases} -2x+by+z=1 \\ x-2by+z=b \\ x+by-2z=1 \end{cases} \iff \begin{cases} -2x+by+z=1 \\ -3x+3z=b+2 \\ x=z \end{cases} \iff \begin{cases} by-z=1 \\ 0=b+2 \\ x=z \end{cases} \iff \begin{cases} -2y=1+z \\ b=-2 \\ x=z \end{cases}$

$\iff \begin{cases} y=-\dfrac{1+z}{2} \\ b=-2 \\ x=z \end{cases}$ $\boxed{\text{Si } b=-2 \text{ alors } x=z \text{ et } y=-\dfrac{1+z}{2}, \text{ sinon pas de solution}}$ rang 2.

Matrices

Exercice 4 : *(En 1 minute)* : On définit les matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix} ;\ B=\begin{pmatrix}1&0&2\\6&5&0\end{pmatrix} ;\ C=\begin{pmatrix}5\\2\\-1\end{pmatrix} ;\ D=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&1&0\\0&1&2\end{pmatrix} ;\ E=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\\\vdots&\vdots\\1&1\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{n,2}(\mathbb{R}) ;\ F=\begin{pmatrix}A&B\\0&I_3\end{pmatrix}$$

Calculer les produits matriciels suivants (s'ils ont un sens) et préciser si la matrice obtenue est symétrique :

1) AB **2)** BA **3)** A^tB **4)** A^2 **5)** ${}^tAA$ **6)** A^3 **7)** B^2 **8)** ${}^tBB$ **9)** B^tB **10)** BC **11)** DC **12)** BD **13)** D^2 **14)** ${}^tCB$ **15)** EA **16)** A^tE **17)** EB **18)** F^2 **19)** ${}^tFF$.

....

Réponses : **1)** $AB=\begin{pmatrix}13&10&2\\20&15&4\end{pmatrix}$. **2)** BA n'est pas définie **3)** ${}^tBA=\begin{pmatrix}13&20\\10&15\\2&4\end{pmatrix}$

4) $A^2=\begin{pmatrix}5&8\\8&13\end{pmatrix}$ symétrique **5)** ${}^tAA=A^2=\begin{pmatrix}5&8\\8&13\end{pmatrix}$ symétrique **6)** $A^3=\begin{pmatrix}21&34\\34&55\end{pmatrix}$ symétrique

7) B^2 n'est pas défini **8)** ${}^tBB=\begin{pmatrix}37&30&2\\30&25&0\\2&0&4\end{pmatrix}$ symétrique **9)** $B^tB=\begin{pmatrix}5&6\\6&61\end{pmatrix}$ symétrique

10) $BC=\begin{pmatrix}3\\40\end{pmatrix}$ **11)** $DC=\begin{pmatrix}9\\12\\0\end{pmatrix}$ **12)** $BD=\begin{pmatrix}1&4&4\\16&17&0\end{pmatrix}$ **13)** $D^2=\begin{pmatrix}5&4&0\\4&5&0\\2&1&4\end{pmatrix}$

14) ${}^tCB$ n'est pas défini **15)** $EA=\begin{pmatrix}3&5\\3&5\\\vdots&\vdots\\3&5\end{pmatrix}$ **16)** $A^tE=\begin{pmatrix}3&3&\cdots&3\\5&5&\cdots&5\end{pmatrix}$ **17)** $EB=\begin{pmatrix}7&5&2\\7&5&2\\\vdots&\vdots&\vdots\\7&5&2\end{pmatrix}$

18) $F^2=\begin{pmatrix}A^2&AB+B\\0&I_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&7&14&10&4\\7&13&26&20&4\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix}$ **19)** ${}^tFF=\begin{pmatrix}{}^tAA&{}^tAB\\{}^tBA&{}^tBB+I_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&7&13&10&2\\7&13&20&15&4\\13&20&38&30&2\\10&15&30&26&0\\2&4&2&0&5\end{pmatrix}$

Exercice 5 : *(Rang)* Calculer le rang des matrices suivantes :

1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$ **2)** $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ **3)** $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ **4)** $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 \\ 1 & 6 & 8 \\ -2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ **5)** $\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & -3 & 8 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

6) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 & 8 & 7 \\ -2 & 4 & -10 & -16 & -14 \end{pmatrix}$ **7)** $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 & 3 & 8 \\ -1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **8)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & 8 & -3 \\ 2 & -8 & -1 & -6 \\ -2 & -4 & -6 & -2 \end{pmatrix}$ **9)** $\begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 8 & 2 \\ 4 & 7 & -3 & 2 \\ -1 & 14 & -13 & 7 \end{pmatrix}$

. . . .

Réponses : **1)** rang 1 **2)** rang 1 **3)** rang 2 **4)** rang 3 **5)** rang 2 **6)** rang 1

7) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 & 3 & 8 \\ -1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 & 3 & 8 \\ 4 & 1 & 8 & 1 & 2 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 7 & 0 & 2 & -7 & -7 \\ 3 & 0 & 7 & -1 & -1 \end{pmatrix} \iff$ rang 3

- **8)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 5 & -2 & 8 & -3 \\ 2 & -8 & -1 & -6 \\ -2 & -4 & -6 & -2 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 6 & 0 & 11 & -2 \\ 6 & 0 & 11 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 6 & 0 & 11 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ donc $\boxed{\text{rang } 2}$

9) $\begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 8 & 2 \\ 4 & 7 & -3 & 2 \\ -1 & 14 & -13 & 7 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 9 & 10 & 5 \\ 0 & 27 & 5 & 14 \\ 0 & 9 & -15 & 4 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 9 & 10 & 5 \\ 0 & 0 & -25 & -1 \\ 0 & 0 & -25 & -1 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -1 & 5 & 2 & 3 \\ 0 & 9 & 10 & 5 \\ 0 & 0 & -25 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$\boxed{\text{rang } 3}$

Exercice 6 : *(Trace)* Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, la somme de ses coefficients diagonaux est appelée "Trace de M" :

$$\text{Tr}(M) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i}$$

1) Montrer que $\text{Tr}(A + \lambda B) = \text{Tr}(A) + \lambda \text{Tr}(B)$ et $\text{Tr}({}^tM) = \text{Tr}(M)$.
2) Montrer que $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$

. . . .

Réponses : **1)** On a $\text{Tr}(A+\lambda B) = \sum_{i=1}^{n} [A+\lambda B]_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} + \lambda b_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} + \lambda \sum_{i=1}^{n} b_{i,i} = \text{Tr}(A) + \lambda \text{Tr}(B)$

On a $[{}^tM]_{i,j} = m_{j,i}$ donc quand $i = j$ cela donne : $\text{Tr}({}^tM) = \sum_{i=1}^{n} [{}^tM]_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} m_{i,i} = \text{Tr}(M)$

2) $\text{Tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n} [AB]_{i,i} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,i} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} a_{i,k} b_{k,i} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} b_{k,i} a_{i,k} = \sum_{k=1}^{n} [BA]_{k,k} = \text{Tr}(BA)$

Exercice 7 : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$
Montrer qu'il existe un unique couple $(S, A) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) \times \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ tel que $M = S + A$.

. . . .

Réponses : Unicité : Si $M = S + A = S' + A'$ alors $S - S' = A' - A$ et ${}^t(S - S') = S - S'$ car S et S' sont symétriques et ${}^t(A' - A) = A - A'$ car A et A' sont antisymétriques. Donc ${}^t(S - S') = S - S' = {}^t(A' - A) = A - A' = S' - S$ donc $S - S' = -(S - S') \iff 2(S - S') = 0 \iff S - S' = 0 \iff S = S'$. De même $A - A' = 0 \iff A = A'$. D'où l'unicité.

L'existence se fait par analyse / synthèse. Analyse : Si $M = S + A$ alors ${}^tM = {}^tS + {}^tA = S - A$ donc $2S = M + {}^tM$ et $2A = M - {}^tM$. On pose donc $\boxed{S = \frac{1}{2}(M + {}^tM) \text{ et } A = \frac{1}{2}(M - {}^tM).}$

Synthèse, on vérifie que les matrices S et A vérifient les trois contraintes : S symétrique, A antisymétrique et $M = S + A$. C'est bon.

Exercice 8 : : Soit $J \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1 : $J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

1) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer J^k. **2)** Calculer $(I_n + J)^k$
3) Trouver une matrice R telle que $R^2 = J$
4) Plus généralement pour $k \in \mathbb{N}^*$, trouver une matrice R telle que $R^k = J$.

. . . .

Réponses : **1)** On a $J^0 = I_n$ et $J^1 = J$. On remarque par ailleurs que $J^2 = nJ$. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, on peut voir en calculant les premières puissances qu'on va avoir une relation du type $J^k = n^{k-1}J$. On montre cela par récurrence sur $k \in \mathbb{N}^*$:
Initialisation : Pour $k = 1$ on a bien $J^1 = n^0 J$.
Hérédité : Si c'est vrai au rang k alors au rang $k+1$ on a $J^{k+1} = J^k J = n^{k-1}J \cdot J = n^{k-1}J^2 = n^{k-1}nJ = n^k J$ c'est donc vrai au rang $k+1$.
Conclusion : on a $\boxed{J^k = \begin{cases} I_n \textbf{ si } k = 0 \\ n^{k-1}J \text{ sinon} \end{cases}}$

2) Comme I_n et J commutent, on a :
$$(I_n + J)^k = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} J^i = I_3 + \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} n^{i-1}J = I_3 + \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} n^i\right) J = \boxed{I_3 + \frac{((1+n)^k - 1)}{n} J}$$

3) On a $J^2 = nJ$ donc $\left(\frac{1}{\sqrt{n}}J\right)^2 = J$. On pose $\boxed{R = \frac{1}{\sqrt{n}}J}$

4) En raisonnant de la même manière, on a $J^k = n^{k-1}J$ donc on peut prendre $\boxed{R = n^{\frac{1}{k}-1}J}$

Inverses

Exercice 9 : *(En 1 minute)* Dire si ces matrices sont inversibles et si oui calculer leur inverse :

1) $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ **2)** $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **3)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ **4)** $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ **5)** $\begin{pmatrix} 0 & 2 & 7 \\ 5 & 9 & 1 \end{pmatrix}$ **6)** $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

7) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 6 & 7 \end{pmatrix}$ **8)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **9)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **10)** $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **11)** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$

. . . .

Réponses : **1)** inverse : $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$ **2)** inverse : $\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **3)** rang 1 donc non inversible

4) inverse : $\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ **5)** pas carrée donc pas inversible **6)** inverse : $\frac{-1}{4}\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

7) inverse : $\frac{-1}{6}\begin{pmatrix} 7 & -1 \\ -6 & 0 \end{pmatrix}$ **8)** inverse : $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **9)** rang 2 donc non inversible

10) inverse : $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **11)** rang 2 donc non inversible

---

Exercice 10 : *(Calcul d'inverse Moyen)* Inverser les matrices suivantes :

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ **2)** $\begin{pmatrix} -5 & 10 & 15 \\ 5 & 15 & 10 \\ 10 & 5 & 0 \end{pmatrix}$ **3)** $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ **4)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 2\sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -2\sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & \sqrt{3} & \sqrt{3} \end{pmatrix}$ **6)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **7)** $\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ avec $a \in \mathbb{R}$

....

Réponses : **1)** $\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{-1}{3} \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{3} & -1 & \frac{-1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{-1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right)$

Finalement $A^{-1} = \boxed{\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 4 & -3 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -3 & 3 & 3 \end{pmatrix}}$

2) $\begin{pmatrix} -5 & 10 & 15 \\ 5 & 15 & 10 \\ 10 & 5 & 0 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ donc on inverse cette matrice.

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -4 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)$

$\Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 5 & 0 & -4 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{-3}{5} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-4}{5} & \frac{6}{5} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$

Finalement $A^{-1} = \boxed{\frac{1}{25}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -4 & 6 & -5 \\ 5 & -5 & 5 \end{pmatrix}}$

3) On simplifie : $\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \Longleftrightarrow$

$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 4 & 0 & -2 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right) \Longleftrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 2 & 0 & -1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$

Finalement $A = 4 \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{-1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}}$

4) $\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\iff \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$

$\iff \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$ Finalement : $A^{-1} = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$

5) $\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 2\sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -2\sqrt{3} & 0 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & \sqrt{3} & \sqrt{3} & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \sqrt{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\iff \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 1 & -1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$ $L_3 \leftarrow L_3 - L_4$

$\iff \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{-7}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{5}{2} \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{-7}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{5}{2} \end{array}\right)$

$\iff \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} & \frac{-3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \frac{-7}{2} & \frac{-3}{2} & \frac{5}{2} \end{array}\right)$ Finalement $A^{-1} = \boxed{\frac{1}{2\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ -2 & -7 & -3 & 5 \end{pmatrix}}$

6) $\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$

$\iff \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$\iff \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$

$$\iff \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 2 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Finalement $A^{-1} = \boxed{\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$

7) $\left(\begin{array}{ccc|ccc} a & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & 0 & 1 & 0 \\ a & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -a & 1 & 0 & -a \end{array}\right)$

$$\iff \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 1 & 0 & -a \\ 0 & a & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 1 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 1+a^2 & a & 1 & a^2 \end{array}\right) \iff \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -a & 1 & 0 & -a \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a}{1+a^2} & \frac{1}{1+a^2} & \frac{a^2}{1+a^2} \end{array}\right)$$

$$\iff \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{-a}{1+a^2} & \frac{-1}{1+a^2} & \frac{1}{1+a^2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1+2a^2}{1+a^2} & \frac{a}{1+a^2} & \frac{-a}{1+a^2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{a}{1+a^2} & \frac{1}{1+a^2} & \frac{a^2}{1+a^2} \end{array}\right)$$

Finalement $A^{-1} = \boxed{\frac{1}{1+a^2}\begin{pmatrix} -a & -1 & 1 \\ 1+2a^2 & a & -a \\ a & 1 & a^2 \end{pmatrix}}$ car $1+a^2 \neq 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.

<u>Exercice 11</u> : : Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est inversible et calculer son inverse.

....

Réponse : $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & 1 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{rg}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 2 \end{pmatrix} = n$ donc elle est inversible.

Si on fait les opérations classiques d'inverses, on se rend compte qu'on a juste besoin de faire $L_n \leftarrow L_n - L_1$ puis $L_n \leftarrow \frac{1}{2}L_n$ et $L_1 \leftarrow L_1 + L_n$ cela donne la matrice inverse : $\boxed{A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 2 & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & & & 2 & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

<u>Exercice 12</u> : *Matrices de rotation* On pose $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

1) Montrer que $R_\theta R_{\theta'} = R_\varphi$ avec φ qu'on exprimera en fonction de θ et θ'.
2) En déduire que pour tout θ et θ', les matrices R_θ et $R_{\theta'}$ commutent.
3) Montrer que $R_\theta \in GL_n(\mathbb{R})$ et $R_\theta^{-1} = R_\varphi$ avec φ qu'on précisera.

4) Soit $z = x + iy$ un nombre complexe. On pose $z' = x' + iy'$ avec $X' = R_\theta X$.
Exprimer Z' en fonction de z et θ.
5) Interpréter graphiquement la transformation opérée aux coordonnées de X après l'opération $X' = R_\theta X$.
Réinterpréter les résultats 1)2) et 3) à l'aune de ces constats.

. . . .

Réponses : **1)** D'après les formules de trigo on a $R_\theta R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'}$ donc $\varphi = \theta + \theta'$.
2) On a $R_{\theta'} R_\theta = R_{\theta'+\theta} = R_{\theta+\theta'} = R_\theta R_{\theta'}$
3) On a $R_0 = I_2$ donc $R_{-\theta} R_\theta = R_0 = I_2$ donc $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$ et $\varphi = -\theta$.
4) On pose $z = r(\cos\theta' + i\sin\theta')$ On a donc $X = \begin{pmatrix} r\cos\theta' \\ r\sin\theta' \end{pmatrix} = rR_{\theta'} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
Donc $R_\theta X = rR_\theta R_{\theta'} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = rR_{\theta+\theta'} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(\theta+\theta') \\ r\sin(\theta+\theta') \end{pmatrix}$. Donc $z' = re^{i(\theta+\theta')} = \boxed{e^{i\theta} z}$
5) C'est la rotation d'angle θ. Donc pour la question 1) faire une rotation d'angle θ puis θ' donne une rotation d'angle $\theta+\theta'$. 2) L'opération de rotation est bien commutative. 3) L'inverse de l'opération de rotation d'angle θ est la rotation d'angle $-\theta$.

<u>**Exercice 13**</u> **:** : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice telle que $A - I_n$ est inversible. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n} A^k = (A - I_n)^{-1} \cdot (A^{n+1} - I_n)$$

.

. . . .

Réponse : On peut s'inspirer du calcul des sommes géométriques. On calcule la matrice suivante :
$(A - I_n)\sum_{k=0}^{n} A^k = \sum_{k=0}^{n}(A - I_n)A^k = \sum_{k=0}^{n} A^{k+1} - A^k = A^{n+1} - I_n$ par somme télescopique.

On en déduit, en multipliant à gauche par l'inverse de $A - I_n$: $\boxed{\sum_{k=0}^{n} A^k = (A - I_n)^{-1} \cdot (A^{n+1} - I_n)}$.
