TD 12 - Polynômes

1BCPST 2 — Feuille d'exercice — Année 2022- 2023

Exercice 1 : *(degré ★)* On donne $d°P = n$ et $c(P) = a \in \mathbb{R}^*$.
Donner le degré et le coefficient dominant des polynômes suivants :
1) $P \cdot X^2$ **2)** $(P(X^2))^3$ **3)** $P^3(X^2)$ **4)** $P \cdot P'(X+1) - P''$ **5)** $P^4 + 2P^2 + 1$ **6)** $P \cdot (P'' - 2P')$
7) $P \circ P'(X^3+1)$ **8)** $P(X^2) - P'(X^3)$ **9)** $P - P'P''$ **10)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{2n} P^k(X^2+1)$

Exercice 2 : *(♡ 2 minutes)* Factoriser les polynômes suivants dans $\mathbb{R}$:
1) $X^2 + 7X + 12$ **2)** $X^2 - 100X + 2500$ **3)** $15X^2 + 75X + 60$ **4)** $X^3 - 10X^2 + 27X - 18$
5) $X^3 - 2X^2 + X - 2$ **6)** $X^4 + 8X^3 + 21X^2 + 22X + 8$ **7)** $X^5 - 2X^3 - 63X$

Exercice 3 : *(★ - ★★ Factorisations plus compliquées)* Factoriser les polynômes suivants dans $\mathbb{R}$:
1) $X^5 - 12X^4 + 44X^3 - 38X^2 - 45X + 50$ **2)** $X^3 + 15X^2 + 75X + 125$. **3)** $X^6 - 19X^3 - 216$
4) $X^4 + 2X^3 + 2X^2 + X^2 + 2X + 2$ **5)** $X^4 - 4X^3 - 26X^2 + 30X - 225$

Exercice 4 : *(★★★ Factorisation de degré n)* Factoriser sur $\mathbb{R}$ les polynômes $X^{2n} + 1$ et $X^{2n+1} + 1$

Exercice 5 : ★★★ Soit P un polynôme. Montrer que $P(X^n)$ est factorisable par $X^n - 1$ si et seulement si P est factorisable par $X - 1$.

Exercice 6 : ★ - ★★ - ★★★ Trouver tous les polynômes P qui vérifient l'égalité suivante :
1) $P = P' + X^2$ **2)** $P = P'P''$ **3)** $P(X^2) = (X^2+1)P$ **4)** $(P')^2 = 4P$ **5)** $P(X+1) = P(X)$.
6) $XP' + P = X^2 + 1$ **7)** $(X^2+1)P' + 2XP = 2X$ **8)** $P^2 = P(X^2)$ **9)** $\exists Q \in \mathbb{R}[X] \mid P = QP'$

Exercice 7 : ★★ On pose $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} X^k$. Montrer que P_n n'admet pas de racines multiple.

Exercice 8 : *(★ Suite de polynômes)* On définit une suite de polynômes $(P_n)_n$ par :

$$P_0 = 1\ ,\ P_1 = X \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}\ ,\ P_{n+2} + P_n = 2XP_{n+1}$$

1) Calculer P_2 et P_3
2) Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n.
3) Déterminer la parité de P_n et calculer $P_n(1)$.

Exercice 9 : *(★★ Polynômes de Tchebytchev)* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on veut montrer qu'il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos(n\theta) = T_n(\cos(\theta))$$

1) S'il existe, prouver l'unicité d'un tel polynôme T_n.
2) A l'aide d'un raisonnement par récurrence et exprimer T_{n+2} en fonction de T_{n+1} et T_n.
3) En déduire l'existence de T_n. Quel est le degré de T_n, quel est son coefficient dominant ?
4) Quelle est la parité de T_n ?
5) Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que $x \to \cos(n\text{Arccos}(x))$ est une fonction polynômiale en x.
6) Montrer que T_n admet n racines. Trouver un majorant et un minorant des racines de T_n.

Exercice 10 : *(★★ - ★★★ Cotangente)* Pour $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on pose cotan $\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{1}{\tan\theta}$.
1) Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe un unique polynôme P_n tel que :

$$\forall \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\ ,\ \sin((2n+1)\theta) = (\sin\theta)^{2n+1} P_n(\text{cotan}^2\,\theta)$$

2) Expliciter P_n
3) Trouver les racines de P_n et en déduire que P_n est un polynôme scindé.
4) En déduire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \text{cotan}^2 \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{3}$
5) Démontrer que $\forall a \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, on a $\text{cotan}^2\, a \leq \dfrac{1}{a^2} \leq 1 + \text{cotan}^2\, a$
6) Prouver que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

Exercice 11 : *(★★ Polynômes de Lagrange)*
Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des réels deux à deux distincts et $b_1, b_2, \ldots, b_n$ des réels pas forcément distincts.
L'objectif de cet exercice est de démontrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \ , \ P(a_i) = b_i$$

P est appelé le polynôme interpolateur de Lagrange.
1) Démontrer ce résultat pour $n = 1$ et $n = 2$.

2) On se place dans le cas général avec n quelconque et on fixe $j \in [\![1, n]\!]$
. **2.a)** Justifier que si P existe alors il est unique.
. **2.b)** Si $b_i = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$, expliciter en fonction des a_i le polynôme interpolateur de Lagrange, qu'on notera L_j
. **2.c)** A l'aide d'une combinaison des polynômes L_j définis ci-dessus, montrer l'existence du polynôme interpolateur de Lagrange dans le cas général.

3) Calculer les polynôme interpolateur de Lagrange vérifiant les conditions suivantes :
. **3.a)** $P(1) = 2$ et $P(3) = 3$
. **3.b)** $P(1) = 2$ et $P(3) = 3$ et $P(-1) = 2$
. **3.c)** $P(1) = 2$ et $P(3) = 3$ et $P(-1) = 2$ et $P(5) = 3$

4) Ensemble des polynômes interpolateurs :
. **4.a)** Si P_0 est le polynôme interpolateur de Lagrange pour les réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et $b_1, b_2, \ldots, b_n$, donner une condition nécessaire et suffisante sur $P \in \mathbb{R}[X]$ (de degré quelconque) pour avoir $\forall i \in\in [\![1, n]\!] \ , \ P(a_i) = b_i$.
. **4.b)** Déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(1) = 2$ et $P(3) = 3$ et $P(-1) = 2$

Exercice 12 : *(★★ - ★★★ Division Euclidienne)*

On admet qu'un sous ensemble de $\mathbb{N}$ non vide admet toujours un minimum.
1) Pour $A, B \in \mathbb{R}[X]$, on souhaite montrer qu'il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$A = QB + R \text{ et } d°R < B$$

. **1.a)** Si A est factorisable par B, justifier l'existence du couple (Q, R).
. **1.b)** Sinon, justifier qu'il existe un polynôme R tel que $d°R = \min\{d°(A - QB \mid Q \in \mathbb{R}[X]\}$
. **1.c)** En déduire l'existence de Q et R dans le cas général.
. **1.d)** Démontrer l'unicité du couple (Q, R).
2) Calculer Q, R pour les polynômes suivants : **a)** $A = X^2 + 1$ et $B = X^2$
. **2.b)** $A = X^2 + 4X + 4$ et $B = X + 2$
. **2.c)** $A = X^4 + 2X^3 + 3X + 1$ et $B = X^2 + 2X + 1$
. **2.d)** $A = X^n$ et $B = X^2 - 6X + 9$ (on calculera R uniquement)
3) On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ et $P = X^2 - 6X + 9$. Calculer $P(A)$.
4) En déduire l'expression de A^n à l'aide du résultat de la question 2.d).