

TD 11 - Géométrie

1BCPST 2

Feuille d'exercice

Année 2022- 2023

Vecteurs

Exercice 1 : (En 1 minute) Dire si les vecteurs suivants forment une base ou pas :

- 1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 2 \\ -10 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$
5) $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ 7) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix}$ 8) $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice 2 : (En 1 minute) Calculer les produits vectoriels suivants :

- 1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ -9 \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 25 \\ -45 \\ 50 \end{pmatrix}$

Exercice 3 : (En 1 minute) Former une base orthonormale contenant les vecteurs suivants :

- 1) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} -5 \\ 5 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 5) $\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$ 6) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ 7) $\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice 4 : Soit $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

- 1) Montrer que $\mathcal{B} = (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.
2) Calculer les coordonnées des vecteurs suivants dans la base $\mathcal{B}$:

. 2.a) $\vec{0}$. 2.b) $\vec{i}$. 2.c) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

Droites, Plans, Cercles

Exercice 5 : Donner une équation cartésienne des plans suivants : 1) $\begin{cases} x = 1 + t + w \\ y = t \\ z = 1 + w \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = t \\ y = w \\ z = 2t \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = t + w \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = 2 + 2t + w \\ y = -1 + t + w \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x = 1 - 5t + 3w \\ y = -4 + 3t + 2w \\ z = 2 + t - w \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x = 3 - 6t + 2w \\ y = -2 + 2t + 2w \\ z = 4 + 2t - 6w \end{cases}$

Exercice 6 : Donner l'équation du plan passant par les trois points suivants : 1) $(0, 0, 2)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 0, 1)$
2) $(2, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$, $(1, 0, 1)$ 3) $(1, 2, 9)$, $(5, 3, 6)$, $(-1, 0, 1)$ 4) $(1, 5, 3)$, $(2, -1, 4)$, $(4, 5, -1)$

Exercice 7 : Donner une représentation paramétrique des plans suivants : 1) $x + y + z = 1$ 2) $y = 1$
3) $2x + 3y + 4z = 10$ 4) $x + 5y = 5$ 5) $\sqrt{2}x + \sqrt{5}y + z = \sqrt{2}$ 6) $\frac{x}{12} + \frac{y}{6} + \frac{z}{8} = \frac{1}{24}$

Exercice 8 : Donner des équations cartésiennes pour les droites suivantes : 1) $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = -1 + t \end{cases}$
2) $\begin{cases} x = t \\ y = 1 + t \\ z = -t \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 0 \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x = 1 - 5t \\ y = 2 + 3t \\ z = 2 + t \end{cases}$ 6) $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 1 + t \\ z = -3 - t \end{cases}$

Exercice 9 : Donner une représentation paramétrique pour les droites suivantes :

$$1) \begin{cases} x + y + z = 0 \\ x = 0 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} x = 0 \\ z = 1 \end{cases} \quad 3) \begin{cases} x - 2y + 3z = 3 \\ x + 5y + 2z = 1 \end{cases} \quad 4) \begin{cases} 2x + 6y + 4z = 2 \\ 3x + 9y + 12z = -3 \end{cases}$$

Exercice 10 : (*intersections dans $\mathbb{R}^2$*) Calculer les intersections des différents éléments en dimension 2 :

$D_1 : x + 2y = 5$; $D_2 : 2x - 3y = 1$; (AB) avec $A : (1, 3)$ et $B : (2, 5)$;

$C_1 : x^2 + (y - 1)^2 = 16$; C_2 cercle centré en A de rayon 2.

Exercice 11 : (*intersections dans $\mathbb{R}^3$*) Calculer les intersections des différents éléments en dimension 3 :

$$D_1 : \begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + 2y + 2z = 8 \end{cases} ; D_2 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = -1 + t \end{cases} ; (AB) \text{ avec } A : (1, 2, 0) \text{ et } B : (0, 1, 3) ;$$

$$P_1 : x + 2y + 3z = 1 ; P_2 \text{ plan passant par } C : (1, 0, 1), D : (-1, 1, 0) \text{ et } E : (1, 1, 1) ; P_3 : \begin{cases} x = 1 + t + w \\ y = 2t + w \\ z = 3 + 2t \end{cases}$$

Exercice 12 : 1) Soit $A(a, b)$ et $B(c, d)$ démontrer que l'ensemble des points à égale distance de A et B est une droite dont on donnera l'équation. (C'est la médiatrice)

2) De même dans $\mathbb{R}^3$, montrer que c'est un plan. (C'est le plan médian)

Exercice 13 : Soit C le cercle de centre $\Omega : (a, b)$ de rayon r . On pose $A : (x_0, y_0)$ un point de ce cercle. Donner l'équation de la tangente en A au cercle en A .

Exercice 14 : Soit C_1 et C_2 deux cercles de centre Ω_1 et Ω_2 et avec deux points d'intersection A et B . Montrer que (AB) est orthogonale à $(\Omega_1\Omega_2)$. Quelle figure géométrique est formée par $A\Omega_1B\Omega_2$?

Exercice 15 : Soit S_1 et S_2 deux sphères de centre Ω_1 et Ω_2 qui ont une intersection non réduite à un seul point :

1) Montrer que l'intersection des deux sphères est contenue dans un seul plan.

2) L'intersection est donc un cercle. Montrer que le centre de ce Cercle appartient à $(\Omega_1\Omega_2)$.

Distances

Exercice 16 : Calculer la distance du point M à la droite ou aux plans suivants :

1) $M : (2, 5)$ et $D : 2x + 8y = 2$ 2) $M : (1, 1, 1)$, $P : x + 2y + 3z = 1$

3) $M : (2, 3)$ et D dirigée par $\vec{u} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$ passant par $A : (1, 3)$.

4) $M : (1, 3)$ et $D : y = 6x + 12$. 5) $M : (-1, -1, 2)$ et $P : \begin{cases} x = 1 + t + w \\ y = 1 + 2t + w \\ z = -1 - t + w \end{cases}$

6) u $M : (1, 0, 5)$, et P de repère $(A, \vec{u}, \vec{v})$ avec $A(2, 3, -1)$, $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Exercice 17 : (*Distance à une droite dans l'espace*) Si M est un point de l'espace et D une droite alors le projeté orthogonal de M sur D est le point d'intersection de D avec le plan orthogonal à D passant par M .

1) Calculer la distance de $M : (1, 2, 3)$ avec la droite dirigée par $\vec{u} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ passant par $A : (1, -2, 0)$.

2) Calculer la distance de $O : (0, 0, 0)$ avec la droite $D : \begin{cases} 2x + 3y - z = 1 \\ x + y + 3z = 2 \end{cases}$

Exercice 18 : (*Distance à un cercle*) Si C est un cercle alors la distance de $M \in \mathbb{R}^2$ au cercle est donnée par $d(C, M) = \min\{HM \mid H \in C\}$

1) Calculer la distance de $M : (1, 3)$ au cercle de centre $(0, 0)$ de rayon 1.

2) Calculer la distance de $M : (2, 5)$ au cercle de centre $(1, 2)$ de rayon 4.