TD 11 - Géométrie Corrigé

1BCPST 2 — Feuille d'exercice — Année 2022- 2023

Vecteurs

Exercice 1 : *(En 1 minute)* Dire si les vecteurs suivants forment une base ou pas :

1) $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ **2)** $\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}2\\-10\end{pmatrix}$ **3)** $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ **4)** $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$

5) $\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ **6)** $\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ **7)** $\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}7\\8\\9\end{pmatrix}$ **8)** $\begin{pmatrix}1\\-2\\3\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3\\-1\\2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$

. . . .

Réponses : **1)** Oui **2)** Non **3)** Oui **4)** Oui **5)** Non **6)** Non **7)** Non **8)** Oui

---

Exercice 2 : *(En 1 minute)* Calculer les produits vectoriels suivants :

1) $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ **2)** $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}1\\-5\\1\end{pmatrix}$ **3)** $\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix}$ **4)** $\begin{pmatrix}5\\3\\10\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}4\\8\\-9\end{pmatrix}$ **5)** $\begin{pmatrix}4\\8\\12\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}25\\-45\\50\end{pmatrix}$

. . . .

1) $\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$ **2)** $\begin{pmatrix}5\\1\\0\end{pmatrix}$ **3)** $\begin{pmatrix}-1\\7\\-4\end{pmatrix}$ **4)** $\begin{pmatrix}107\\95\\28\end{pmatrix}$ **5)** $20\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}5\\-9\\10\end{pmatrix}=20\begin{pmatrix}47\\5\\-19\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}940\\40\\-380\end{pmatrix}$

Exercice 3 : *(En 1 minute)* Former une base orthonormale contenant les vecteurs suivants :

1) $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ **2)** $\begin{pmatrix}-5\\5\end{pmatrix}$ **3)** $\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix}$ **4)** $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ **5)** $\begin{pmatrix}-2\\5\\0\end{pmatrix}$ **6)** $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ **7)** $\begin{pmatrix}4\\5\\-1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\1\\9\end{pmatrix}$

. . . .

1) $\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$ et $\frac{1}{\sqrt5}\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$ **2)** $\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ et $\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ **3)** $\frac{1}{\sqrt3}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

4) $\frac{1}{\sqrt3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $\frac{1}{\sqrt6}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$ **5)** $\frac{1}{\sqrt{29}}\begin{pmatrix}-2\\5\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\frac{1}{\sqrt{29}}\begin{pmatrix}5\\2\\0\end{pmatrix}$ **6)** $\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\frac{1}{\sqrt2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ **7)** $\frac{1}{\sqrt{26}}\begin{pmatrix}4\\5\\-1\end{pmatrix}$, $\frac{1}{\sqrt{83}}\begin{pmatrix}1\\1\\9\end{pmatrix}$ et $\frac{1}{\sqrt{3306}}\begin{pmatrix}44\\37\\-1\end{pmatrix}$

Exercice 4 : Soit $\overrightarrow{u}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$.

1) Montrer que $\mathcal{B}=(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$ forme une base de $\mathbb{R}^3$.

2) Calculer les coordonnées des vecteurs suivants dans la base $\mathcal{B}$:

. 2.a) $\overrightarrow{0}$. 2.b) $\overrightarrow{i}$. 2.c) $\overrightarrow{x}=\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}$

. . . .

1) Je propose qu'on inverse carrément la matrice, ainsi les calculs des vecteurs suivants seront beaucoup plus simples. $A=\begin{pmatrix}1&1&3\\0&-1&2\\2&1&1\end{pmatrix}$ L'inversion donne : $A^{-1}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}-3&2&5\\4&-5&-2\\2&1&-1\end{pmatrix}$ Comme la matrice est inversible, elle est de rang 3 et donc $(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w})$ forme bien une base de $\mathbb{R}^3$ **2)** . 2.a) On a $\overrightarrow{0}=0\overrightarrow{u}+0\overrightarrow{v}+0\overrightarrow{w}$

. 2.b) On a $A^{-1}\vec{i} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}-3\\4\\2\end{pmatrix}$ d'où $\boxed{\vec{i} = \frac{-3}{7}\vec{u} + \frac{4}{7}\vec{u} + \frac{2}{7}\vec{w}}$

. 2.c) On a $A^{-1}\vec{x} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix}-28\\-21\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\-3\\1\end{pmatrix}$ d'où $\boxed{\vec{x} = -4\vec{u} - 3\vec{u} + \vec{w}}$

Droites, Plans, Cercles

Exercice 5 : Donner une équation cartésienne des plans suivants : **1)** $\begin{cases} x = 1 + t + w \\ y = t \\ z = 1 + w \end{cases}$

2) $\begin{cases} x = t \\ y = w \\ z = 2t \end{cases}$ **3)** $\begin{cases} x = t + w \\ y = 1 + w \\ z = 0 \end{cases}$ **4)** $\begin{cases} x = 2 + 2t + w \\ y = -1 + t + w \\ z = 3 + 2t \end{cases}$ **5)** $\begin{cases} x = 1 - 5t + 3w \\ y = -4 + 3t + 2w \\ z = 2 + t - w \end{cases}$ **6)** $\begin{cases} x = 3 - 6t + 2w \\ y = -2 + 2t + 2w \\ z = 4 + 2t - 6w \end{cases}$

....

1) $x - y - z = 0$ **2)** $2x - z = 0$ **3)** $x + y = 1$

4) $\begin{cases} x = 2 + 2t + w \\ y = -1 + t + w \\ z = 3 + 2t \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 + 2t + w \\ y - x = -3 - t \\ z = 3 + 2t \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 + 2t + w \\ y - x = -3 - t \\ z + 2y - 2x = -3 \end{cases}$

Finalement l'équation est $\boxed{-2x + 2y + z = -3}$

5) $\begin{cases} x = 1 - 5t + 3w \\ y = -4 + 3t + 2w \\ z = 2 + t - w \end{cases} \iff \begin{cases} z = 2 + t - w \\ x = 1 - 5t + 3w \\ y = -4 + 3t + 2w \end{cases} \iff \begin{cases} z = 2 + t - w \\ 3z + x = 7 - 2t \\ 2z + y = 5t \end{cases} \iff \begin{cases} z = 2 + t - w \\ 15z + 5x = 35 - 10t \\ 4z + 2y = 10t \end{cases}$

$\iff \begin{cases} z = 2 + t - w \\ 10z + 5y = 10t \\ 19z + 5x + 2y = 35 \end{cases}$ Finalement l'équation est $\boxed{5x + 2y + 19z = 35}$.

6) $\begin{cases} x = 3 - 6t + 2w \\ y = -2 + 2t + 2w \\ z = 4 + 2t - 6w \end{cases} \iff \begin{cases} z = 4 + 2t - 6w \\ x = 3 - 6t + 2w \\ y = -2 + 2t + 2w \end{cases} \iff \begin{cases} z = 4 + 2t - 6w \\ x + 3z = 15 - 16w \\ y - z = -6 + 8w \end{cases} \iff \begin{cases} z = 4 + 2t - 6w \\ y - z = -6 + 8w \\ x + 2y + z = 3 \end{cases}$

Finalement l'équation est $\boxed{x + 2y + z = 3}$.

Exercice 6 : Donner l'équation du plan passant par les trois points suivants : **1)** $(0, 0, 2)$, $(1, 0, 1)$, $(0, 0, 1)$ **2)** $(2, 0, 0)$, $(0, 3, 0)$, $(1, 0, 1)$ **3)** $(1, 2, 9)$, $(5, 3, 6)$, $(-1, 0, 1)$ **4)** $(1, 5, 3)$, $(2, -1, 4)$, $(4, 5, -1)$

....

1) $A(0, 0, 2)$, $B(1, 0, 1)$, $C(0, 0, 1)$ sont tous les trois par le plan $\boxed{y = 0}$ c'est donc le seul plan qui fonctionne.

2) $A(2, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$, $C(1, 0, 1)$ donc $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$

On a donc $\begin{cases} x = 2 - 2t - w \\ y = 3t \\ z = w \end{cases} \iff \begin{cases} x = 2 - \frac{2}{3}y - z \\ y = 3t \\ z = w \end{cases}$ Donc l'équation est $\boxed{3x + 2y + 3z = 6}$.

3) $A(1, 2, 9)$, $B(5, 3, 6)$, $C(-1, 0, 1)$ donc $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix}4\\1\\-3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}-2\\-2\\8\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}-1\\-1\\4\end{pmatrix}$ On a donc $\begin{cases} x = 1 + 4t - w \\ y = 2 + t - w \\ z = 9 + t + 4w \end{cases} \iff$

$\begin{cases} y = 2 + t - w \\ x - 4y = -7 + 3w \\ z - y = 5 + 5w \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2 + t - w \\ 5x - 20y = -35 + 15w \\ 3z - 3y = 15 + 15w \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2 + t - w \\ 3z - 3y = 15 + 15w \\ 5x - 17y - 3z = -50 \end{cases}$

Donc l'équation est $\boxed{5x-17y-3z=-50}$.

4) $A(1,5,3)$, $B(2,-1,4)$, $C(4,5,-1)$ donc $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}1\\-6\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}3\\0\\-4\end{pmatrix}$ On a donc $\begin{cases}x=1+t+3w\\y=5-6t\\z=3-t-4w\end{cases}\iff$

$\begin{cases}4x=4+4t+12w\\y=5-6t\\3z=9-3t-12w\end{cases}\iff\begin{cases}4x=4+4t+12w\\y=5-6t\\4x+3z=13-t\end{cases}\iff\begin{cases}4x=4+4t+12w\\y=5-6t\\24x+18z=78-6t\end{cases}\iff\begin{cases}4x=4+4t+12w\\y=5-6t\\24x-y+18z=73\end{cases}$

Donc l'équation est $\boxed{24x-y+18z=73}$

<u>Exercice 7</u> : Donner une représentation paramétrique des plans suivants : **1)** $x+y+z=1$ **2)** $y=1$ **3)** $2x+3y+4z=10$ **4)** $x+5y=5$ **5)** $\sqrt{2}x+\sqrt{5}y+z=\sqrt{2}$ **6)** $\frac{x}{12}+\frac{y}{6}+\frac{z}{8}=\frac{1}{24}$

. . . .

Le principe est toujours le même : trouver deux vecteurs directeurs du plans, donc trois points A,B,C appartenant au plan dont les vecteurs ne sont pas colinéaires.

1) On a $A(1,0,0)$; $B(0,1,0)$ et $C(0,0,1)\in\mathcal{P}$ donc $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ Finalement $\boxed{\begin{cases}x=1-t-w\\y=t\\z=w\end{cases}}$

2) $\boxed{\begin{cases}x=t\\y=1\\z=w\end{cases}}$ **3)** On a $A(5,0,0)$; $B(3,0,1)$ et $C(0,2,1)\in\mathcal{P}$ donc $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-5\\2\\1\end{pmatrix}$

Finalement $\boxed{\begin{cases}x=5-2t-5w\\y=2w\\z=t+w\end{cases}}$ **4)** On a $A(5,0,0)$; $B(0,1,0)$ et $C(-5,2,1)\in\mathcal{P}$ donc $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-5\\1\\0\end{pmatrix}$

et $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-10\\2\\1\end{pmatrix}$ Finalement $\boxed{\begin{cases}x=5-5t-10w\\y=t+2w\\z=w\end{cases}}$

5) On a $A(1,0,0)$; $B(0,0,\sqrt{2})$ et $C(0,1,\sqrt{2}-\sqrt{5})\in\mathcal{P}$ donc $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-1\\0\\\sqrt{2}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-1\\1\\\sqrt{2}-\sqrt{5}\end{pmatrix}$ Finalement $\boxed{\begin{cases}x=1-t-w\\y=w\\z=\sqrt{2}t+(\sqrt{2}-\sqrt{5})w\end{cases}}$ **6)** $\frac{x}{12}+\frac{y}{6}+\frac{z}{8}=\frac{1}{24}\iff 2x+4y+3z=1$. On a $A(-1,3,0)$;

$B(0,1,-1)$ et $C(1,2,-3)\in\mathcal{P}$ donc $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}1\\-2\\-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix}$ Finalement $\boxed{\begin{cases}x=1+t+2w\\y=3-2t-w\\z=-t-3w\end{cases}}$

<u>Exercice 8</u> : Donner des equations cartésiennes pour les droites suivantes : **1)** $\begin{cases}x=1+t\\y=2t\\z=-1+t\end{cases}$

2) $\begin{cases}x=t\\y=1+t\\z=-t\end{cases}$ **3)** $\begin{cases}x=t\\y=0\\z=0\end{cases}$ **4)** $\begin{cases}x=1+t\\y=0\\z=3+2t\end{cases}$ **5)** $\begin{cases}x=1-5t\\y=2+3t\\z=2+t\end{cases}$ **6)** $\begin{cases}x=5+t\\y=1+t\\z=-3-t\end{cases}$

. . . .

1) $\begin{cases}x=1+t\\y=2t\\z=-1+t\end{cases}\iff\begin{cases}2x=2+2t\\y=2t\\2z=-2+2t\end{cases}\iff\begin{cases}2x=2+y\\y=2t\\2z=-2+y\end{cases}$ Finalement : $\boxed{\begin{cases}2x-y=2\\y-2z=2\end{cases}}$

2) $\begin{cases}x=t\\y=1+t\\z=-t\end{cases}\iff\begin{cases}x=t\\y=1+x\\z=-x\end{cases}$ Finalement : $\boxed{\begin{cases}x-y=-1\\x+z=0\end{cases}}$ **3)** $\begin{cases}x=t\\y=0\\z=0\end{cases}$ donne $\boxed{\begin{cases}y=0\\z=0\end{cases}}$

4) $\left\{\begin{array}{l} x=1+t \\ y=0 \\ z=3+2t \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=1+t \\ y=0 \\ z-2x=1 \end{array}\right.$ Finalement $\boxed{\left\{\begin{array}{l} y=0 \\ z-2x=1 \end{array}\right.}$

5) $\left\{\begin{array}{l} x=1-5t \\ y=2+3t \\ z=2+t \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} z=2+t \\ x+5z=11 \\ y-3z=-4 \end{array}\right.$ Finalement $\boxed{\left\{\begin{array}{l} x+5z=11 \\ y-3z=-4 \end{array}\right.}$

6) $\left\{\begin{array}{l} x=5+t \\ y=1+t \\ z=-3-t \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=5+t \\ y-x=-4 \\ z+x=2 \end{array}\right.$ Finalement $\boxed{\left\{\begin{array}{l} y-x=-4 \\ z+x=2 \end{array}\right.}$

Exercice 9 : Donner une représentation paramétrique pour les droites suivantes :

1) $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ x=0 \end{array}\right.$ **2)** $\left\{\begin{array}{l} x=0 \\ z=1 \end{array}\right.$ **3)** $\left\{\begin{array}{l} x-2y+3z=3 \\ x+5y+2z=1 \end{array}\right.$ **4)** $\left\{\begin{array}{l} 2x+6y+4z=2 \\ 3x+9y+12z=-3 \end{array}\right.$

. . . .

On fait un pivot de Gauss à chaque fois

1) $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ x=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y+z=0 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=-z \end{array}\right.$ donc $\boxed{\left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=-t \\ z=t \end{array}\right.}$ **2)** $\boxed{\left\{\begin{array}{l} x=0 \\ y=t \\ z=1 \end{array}\right.}$

3) $\left\{\begin{array}{l} x-2y+3z=3 \\ x+5y+2z=1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x-2y+3z=3 \\ 7y-z=-2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=-3-19y \\ z=7y+2 \end{array}\right.$ Finalement $\boxed{\left\{\begin{array}{l} x=-3-19t \\ y=t \\ z=7t+2 \end{array}\right.}$

4) $\left\{\begin{array}{l} 2x++6y+4z=2 \\ 3x+9y+12z=-3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x+3y+2z=1 \\ x+3y+4z=-1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x+3y+2z=1 \\ 2z=-2 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=3-3y \\ z=-1 \end{array}\right.$

Finalement $\boxed{\left\{\begin{array}{l} x=3-3t \\ y=t \\ z=-1 \end{array}\right.}$

Exercice 10 : *(intersections dans $\mathbb{R}^2$)* Calculer les intersections des différents éléments en dimension 2 :
$D_1 : x+2y=5$; $D_2 = 2x-3y=1$; (AB) avec $A:(1,3)$ et $B:(2,5)$;
$\mathcal{C}_1 : x^2+(y-1)^2=16$; $\mathcal{C}_2$ cercle centré en A de rayon 2.

. . . .

On fait un pivot de Gauss à chaque fois

$\boxed{D_1 \cap D_2}$ $\left\{\begin{array}{l} x+2y=5 \\ 2x-3y=1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x+2y=5 \\ -7y=-9 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{17}{7} \\ y=\dfrac{9}{7} \end{array}\right.$ Donc $\boxed{D_1 \cap D_2 = \left\{\left(\dfrac{17}{7}, \dfrac{9}{7}\right)\right\}}$

$\boxed{D_1 \cap (AB)}$ Calculons l'équation de (AB). On a $y=ax+b$ où $a=\dfrac{5-3}{2-1}=2$ donc $y=2x+b$ et $b=y-2x=3-2=1$ d'après les coordonnées de A d'où $\underline{(AB) : y-2x=1}$

On a alors $\left\{\begin{array}{l} y-2x=1 \\ x+2y=5 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} y-2x=1 \\ 5x=3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{11}{5} \\ x=\dfrac{3}{5} \end{array}\right.$ On trouve donc $\boxed{D_1 \cap (AB) = \left\{\left(\dfrac{3}{5}, \dfrac{11}{5}\right)\right\}}$

$\boxed{D_2 \cap (AB)}$ $\left\{\begin{array}{l} y-2x=1 \\ 2x-3y=1 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} y-2x=1 \\ -4x=4 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} y=-1 \\ x=-1 \end{array}\right.$ On trouve donc $\boxed{D_2 \cap (AB) = \{(-1,-1)\}}$

$\boxed{D_1 \cap C_1}$ $\left\{\begin{array}{l} x+2y=5 \\ x^2+(y-1)^2=16 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} x=5-2y \\ (5-2y)^2+(y-1)^2=16 \end{array}\right.$ On a $(5-2y)^2+(y-1)^2=16 \iff$ $5y^2-22y+26=16 \iff 5y^2-22y+10=0$ On a $\Delta = 4\cdot(121-50)=4\cdot 71>0$. On a donc $y_1=\dfrac{11+\sqrt{71}}{5}$ et $y_2=\dfrac{11-\sqrt{71}}{5}$. finalement on trouve : $\boxed{D_1 \cap C_1 = \left\{\left(\dfrac{3-2\sqrt{71}}{5}, \dfrac{11+\sqrt{71}}{5}\right), \left(\dfrac{3+2\sqrt{71}}{5}, \dfrac{11-\sqrt{71}}{5}\right)\right\}}$

$\boxed{D_2 \cap C_1}$ $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ x^2+(y-1)^2=16 \end{cases} \iff \begin{cases} x=\dfrac{1+3y}{2} \\ \dfrac{1}{4}(1+3y)^2+(y-1)^2=16 \end{cases}$ On a $(1+3y)^2+4(y-1)^2=64 \iff$

$13y^2+2y-58=0$ On a $\Delta = 4\cdot(4+58\cdot 13)=4\cdot 758>0$. On a donc $y_1=\dfrac{\sqrt{758}-1}{13}$ ou $y_2=-\dfrac{\sqrt{758}+1}{13}$

On a donc $\boxed{D_1\cap C_1=\left\{\left(\dfrac{10+3\sqrt{758}}{26},\dfrac{\sqrt{758}-1}{13}\right);\left(\dfrac{10-3\sqrt{758}}{26},\dfrac{-\sqrt{758}+1}{13}\right)\right\}}$

$\boxed{(AB)\cap C_1}$ $\begin{cases} y-2x=1 \\ x^2+(y-1)^2=16 \end{cases} \iff \begin{cases} y=1+2x \\ x^2+(2x)^2=16 \end{cases}$

On a $x^2+(2x)^2=16 \iff 5x^2=16 \iff x=\pm\dfrac{4}{\sqrt{5}}$ On a donc $\boxed{(AB)\cap C_1=\left\{\left(\dfrac{4\sqrt{5}}{5},\dfrac{5+8\sqrt{5}}{5}\right);\left(-\dfrac{4\sqrt{5}}{5},\dfrac{5-8\sqrt{5}}{5}\right)\right\}}$

$\boxed{C_1\cap C_2}$ On calcule l'équation de $\underline{C_2 : (x-1)^2+(y-3)^2=4}$

$\begin{cases} x^2+(y-1)^2=16 \\ (x-1)^2+(y-3)^2=4 \end{cases}$ $L_1-L_2 : x^2-(x-1)^2+(y-1)^2-(y-3)^3=12 \iff (x-x+1)(x+x-1)+(y-1-y+3)(y-1+y-3)=12 \iff 2x+1+2(2y-4)=12 \iff 2x+4y-7=12 \iff 2x+4y-19=0 \iff x=\dfrac{19}{2}-2y$

On injecte dans une equation : $x^2+(y-1)^2=16 \iff (\dfrac{19}{2}-2y)^2+(y-1)^2=16 \iff 5y^2-21y+\dfrac{23}{4}=16 \iff 5y^2-21y-\dfrac{41}{4}=0$

$\Delta=21^2+41*5=441+205=646$ donc $y_1=\dfrac{21+\sqrt{646}}{10}$ et $y_2=\dfrac{21-\sqrt{646}}{10}$.

Finalement $\boxed{C_1\cap C_2=\left\{\left(\dfrac{53-2\sqrt{646}}{10},\dfrac{21+\sqrt{646}}{10}\right);\left(\dfrac{53+2\sqrt{646}}{10},\dfrac{21-\sqrt{646}}{10}\right)\right\}}$

$\boxed{D_1\cap C_2}$ $\begin{cases} x+2y=5 \\ (x-1)^2+(y-3)^2=4 \end{cases} \iff \begin{cases} x=5-2y \\ (4-2y)^2+(y-3)^2=4 \end{cases}$ $(4-2y)^2+(y-3)^2=4 \iff$

$5y^2-22y+21=0$ On a $\Delta=4(121-105)=4\cdot 16>0$ Donc $y_1=\dfrac{7}{5}$ et $y_2=3$

On a donc $\boxed{D_1\cap C_2=\left\{\left(\dfrac{11}{5},\dfrac{7}{5}\right),(-1,3)\right\}}$

$\boxed{D_2\cap C_2}$ $\begin{cases} 2x-3y=1 \\ (x-1)^2+(y-3)^2=4 \end{cases} \iff \begin{cases} x=\dfrac{1+3y}{2} \\ (3y-1)^2+4(y-3)^2=16 \end{cases}$ $(3y-1)^2+4(y-3)^2=16 \iff$

$13y^2-18y+21=0$ On $\Delta=4(81-13\cdot 21)<0$ donc pas d'intersection. $\boxed{D_2\cap C_1=\emptyset}$

$\boxed{(AB)\cap C_2}$ $\begin{cases} y-2x=1 \\ (x-1)^2+(y-3)^2=4 \end{cases} \iff \begin{cases} y=1+2x \\ (x-1)^2+4(2x-2)^2=4 \end{cases}$ $(x-1)^2+4(x-1)^2=4 \iff$

$5(x-1)^2=4 \iff x-1=\pm\dfrac{2}{5} \iff x=\dfrac{7}{5}$ ou $ix=\dfrac{3}{5}$. Finalement $\boxed{\left\{\left(\dfrac{2}{5},\dfrac{9}{5}\right),\left(\dfrac{11}{5},\dfrac{27}{5}\right)\right\}}$

Exercice 11 : *(intersections dans $\mathbb{R}^3$)* Calculer les intersections des différents éléments en dimension 3 :

$D_1 : \begin{cases} x-y+z=2 \\ x+2y+2z=8 \end{cases}$; $D_2 = \begin{cases} x=1+t \\ y=2t \\ z=-1+t \end{cases}$; (AB) avec $A:(1,2,0)$ et $B:(0,1,3)$;

$P_1 : x+2y+3z=1$; P_2 plan passant par $C:(1,0,1)$, $D:(-1,1,0)$ et $E:(1,1,1)$; $P_3 : \begin{cases} x=1+t+w \\ y=2t+w \\ z=3+2t \end{cases}$

....

$\boxed{D_1\cap D_2}$ On injecte $D_2 : \begin{cases} x=1+t \\ y=2t \\ z=-1+t \end{cases}$ dans l'équation de $D_1 : \begin{cases} x-y+z=2 \\ x+2y+2z=8 \end{cases} \iff \begin{cases} 1+t-2t+(-1+t)=2 \\ 1+t+4t+(-1+t)=8 \end{cases} \Leftarrow$

$\begin{cases} 0 = 2 \\ 6t = 8 \end{cases}$ Le système es incompatibe donc $\boxed{D_1 \cap D_2 = \emptyset}$

$\boxed{D_1 \cap (AB)}$ On a $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ donc $(AB) : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - t \\ z = 3t \end{cases}$ et on injecte dans D_1 :
$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + 2y + 2z = 8 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 - t - (2 - t) + 3t = 2 \\ 1 - t + 2(2 - t) + 6t = 8 \end{cases} \iff \begin{cases} 3t = 3 \\ 3t = 3 \end{cases} \iff t = 1$ On a donc un point d'intersection donné par le paramètre $t = 1$, en injectant cela dans les coordonnées paramétrique de (AB), on trouve $\boxed{D_1 \cap (AB) = \{(0, 1, 3)\}}$

$\boxed{D_2 \cap (AB)}$ Plusieurs manières de faire. Je propose d'égaliser les equations paramétriques de part et d'autre : On veut $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 - t \\ z = 3t \end{cases}$ et $\begin{cases} x = 1 + s \\ y = 2s \\ z = -1 + s \end{cases}$ donc cela donne :
$\begin{cases} 1 + s = 1 - t \\ 2s = 2 - t \\ -1 + s = 3t \end{cases} \iff \begin{cases} s = -t \\ 2s + t = 2 \\ s - 3t = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} s = -t \\ s = 2 \\ 4s = -1 \end{cases}$ le système est incompatible, on n'a donc pas de point d'intersection $\boxed{D_2 \cap (AB) = \emptyset}$.

$\boxed{P_1 \cap D_1}$ On a trois equations : $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + 2y + 2z = 8 \\ x + 2y + 3z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 3y + z = 6 \\ 3y + 2z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 3y + z = 6 \\ z = -5 \end{cases} \iff$
$\begin{cases} x = \dfrac{32}{3} \\ y = \dfrac{11}{3} \\ z = -5 \end{cases}$

On obtient : $\boxed{P_1 \cap D_1 = \left\{ \left(\dfrac{32}{3}, \dfrac{11}{3}, -5 \right) \right\}}$

$\boxed{P_1 \cap D_2}$ On insère le paramètre de D_2 dans l'équation de P_1 : $(1+t)+4t+3(-1+t) = 1 \iff -2+8t = 1 \iff t = \dfrac{3}{8}$. On a donc en injectant le paramètre dans l'equation de D_2 : $\boxed{P_1 \cap D_2 = \left\{ \left(\dfrac{11}{8}, \dfrac{3}{4}, \dfrac{-5}{8} \right) \right\}}$

$\boxed{P_1 \cap (AB)}$ On insère le paramètre de (AB) dans l'équation de P_1 : $(1-t)+2(2-t)+9t = 1 \iff 5+6t = 1 \iff t = \dfrac{-2}{3}$. On a donc en injectant le paramètre dans l'equation de (AB) : $\boxed{P_1 \cap (AB) = \left\{ \left(\dfrac{5}{3}, \dfrac{8}{3}, -2 \right) \right\}}$

$\boxed{P_2 \cap D_1}$ On a $\overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CE} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{n} = \overrightarrow{CD} \wedge \overrightarrow{CE} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$. Donc P_2 a pour equation $x - 2z = -1$. On résout : $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + 2y + 2z = 8 \\ x - 2z = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y + z = 2 \\ 3x + 4z = 12 \\ x - 2z = -1 \end{cases} \iff \begin{cases} x - y + z = 2 \\ x - 2z = -1 \\ 10z = 15 \end{cases} \iff$
$\begin{cases} y = \dfrac{3}{2} \\ x = 2 \\ z = \dfrac{3}{2} \end{cases}$

On obtient donc $\boxed{P_1 \cap (AB) = \left\{ \left(2, \dfrac{2}{3}, \dfrac{2}{3} \right) \right\}}$

$\boxed{P_2 \cap D_2}$ On insère le paramètre de D_2 dans l'équation de P_2 : $(1 + t) - 2(-1 + t) = -1 \iff -t + 3 = -1 \iff t = 4$. On a donc en injectant le paramètre dans l'équation de D_2 : $\boxed{P_1 \cap D_2 = \{(5, 8, 3)\}}$

$\boxed{P_2 \cap (AB)}$ On insère le paramètre de (AB) dans l'équation de P_2 : $(1-t) - 6t = -1 \iff 1 - 7t = -1 \iff t = \dfrac{2}{7}$. On a donc en injectant le paramètre dans l'équation de (AB) : $\boxed{P_1 \cap (AB) = \left\{ \left(\dfrac{5}{7}, \dfrac{12}{7}, \dfrac{6}{7} \right) \right\}}$

$\boxed{P_2 \cap P_1}$ Que dire, sinon que les plans ne sont pas parallèles (car leur vecteur normaux ne sont pas colinéaires) et donc que leur intersection est la droite $\boxed{P_2 \cap P_1 = D_3 \text{ d'équation cartésienne : } \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x - 2z = -1 \end{cases}}$

$\boxed{P_3 \cap D_1}$ On injecte les paramètres de P_3 dans les equations de D_1 :

$\begin{cases} x - y + z = 2 \\ x + 2y + 2z = 8 \end{cases} \iff \begin{cases} 1 + t + w - 2t - w + 3 + 2t = 2 \\ 1 + t + w + 4t + 2w + 6 + 2t = 8 \end{cases} \iff \begin{cases} t = -2 \\ 7t + 3w = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} t = -2 \\ 3w = 15 \end{cases} \iff \begin{cases} t = -2 \\ w = 5 \end{cases}$ Finalement en injectant dans l'équation paramétrique de P_3, on trouve $\boxed{P_3 \cap D_1 = \{(4, 1, -3)\}}$

$\boxed{P_3 \cap D_2}$ On a deux equations paramétriques, on peut donc égaliser les coordonnées :

$\begin{cases} 1 + s = 1 + t + w \\ 2s = 2t + w \\ -1 + s = 3 + 2t \end{cases} \iff \begin{cases} s - t - w = 0 \\ 2s - 2t - w = 0 \\ s - 2t = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} s - t - w = 0 \\ s - t = 0 \\ s - 2t = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} s - t - w = 0 \\ s - t = 0 \\ -t = 4 \end{cases} \iff \begin{cases} w = 0 \\ s = -4 \\ t = -4 \end{cases}$ Donc on trouve $\boxed{P_3 \cap D_1 = \{(-3, -8, -5)\}}$

$\boxed{P_3 \cap (AB)}$ On a deux equations paramétriques, on peut donc égaliser les coordonnées :

$$\begin{cases} 1 - s = 1 + t + w \\ 2 - s = 2t + w \\ 3s = 3 + 2t \end{cases} \iff \begin{cases} s + t + w = 0 \\ s + 2t + w = 2 \\ 3s - 2t = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} s + t + w = 0 \\ t = 2 \\ 3s - 2t = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} w = -\dfrac{13}{3} \\ t = 2 \\ s = \dfrac{7}{3} \end{cases}$$

Donc on trouve $\boxed{P_3 \cap (AB) = \left\{ \left(\dfrac{-4}{3}, \dfrac{-1}{3}, 7 \right) \right\}}$

$\boxed{P_3 \cap P_1}$ On a P_3 qui a pour vecteur normal $\overrightarrow{n_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ P_3 a donc pour equation $2x - 2y + z = 5$. Il n'est pas parallèle à P_1, et donc l'intersection est une droite :

$\boxed{P_3 \cap P_1 = D_4 \text{ d'équation cartésienne } \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x - 2y + z = 5 \end{cases}}$

$\boxed{P_3 \cap P_2}$ De même $\overrightarrow{n_3}$ et $\overrightarrow{n_2}$ n'étant pas colinéaires, on obtient une droite d'équation

$\boxed{P_3 \cap P_2 = D_5 : \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x - 2z = -1 \end{cases}}$

$\boxed{P_3 \cap P_2 \cap P_1}$ On a $P_3 \cap P_2 \cap P_1 = D_5 \cap P_1$ donc on résout le système :

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x - 2z = -1 \\ 2x - 2y + z = 5 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x - 2z = -1 \\ 3x + 4z = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ x - 2z = -1 \\ 10z = 9 \end{cases} \iff \begin{cases} y = \dfrac{-5}{4} \\ x = \dfrac{4}{5} \\ z = \dfrac{9}{10} \end{cases}$$

Finalement $\boxed{P_3 \cap P_2 \cap P_1 = \left\{ \left(\dfrac{4}{5}, \dfrac{-5}{4}, \dfrac{9}{10} \right) \right\}}$

Exercice 12 : **1)** Soit $A(a, b)$ et $B(c, d)$ démontrer que l'ensemble des points à égale distance de A et B est une droite dont on donnera l'équation. (C'est la médiatrice)
2) De même dans $\mathbb{R}^3$, montrer que c'est un plan. (C'est le plan médian)

. . . .

1) On prend $M(x,y)$. On a $AM = BM \iff \|\overrightarrow{AM}\|^2 = \|\overrightarrow{BM}\|^2 \iff (x-a)^2+(y-b)^2 = (x-c)^2+(y-d)^2 \iff 2(c-a)x+2(d-b)y = c^2+d^2-a^2-b^2$ L'équation de la médiatrice est donc $\boxed{2(c-a)x+2(d-b)y = c^2+d^2-a^2-b^2}$

2) On a le même raisonnement mais avec trois coordonnées $A(a,b,c)$ et $B(d,e,f)$:
Le plan a pour equation $\boxed{2(d-a)x+2(e-b)y+2(f-c)z = d^2+e^2+f^2-a^2-b^2-c^2}$

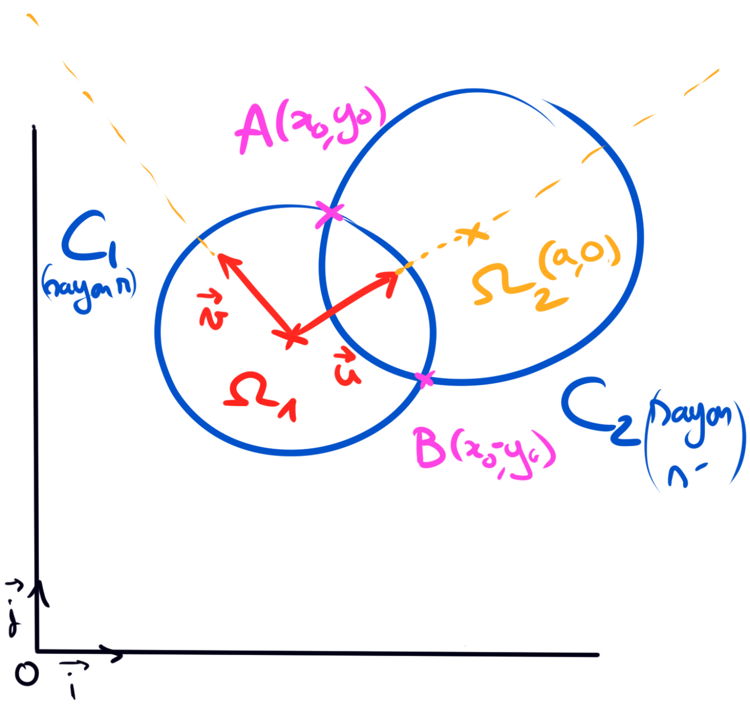
Exercice 13 : Soit C le cercle de centre $\Omega : (a,b)$ de rayon r. On pose $A : (x_0, y_0)$ un point de ce cercle. Donner l'équation de la tangente en au cercle en A.

....

La tangente passe par A et a donc pour equation : $\alpha(x-x_0)+\beta(y-y_0) = 0$. Là deux manières d'identifier α et β : Pour l'équation on peut remarquer que $\overrightarrow{\Omega A}$ est normal à la droite.
On a alors $\boxed{(a-x_0)(x-x_0)+(a-y_0)(y-y_0) = 0}$

Exercice 14 : Soit C_1 et C_2 deux cercles de centre Ω_1 et Ω_2 et avec deux points d'intersection A et B. Montrer que (AB) est orthogonale à $(\Omega_1\Omega_2)$. Quelle figure géométrique est formée par $A\Omega_1B\Omega_2$ si les cercles ont le même rayon ?

....



On pose $\overrightarrow{u} = \dfrac{\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2}}{\Omega_1\Omega_2}$ et $\overrightarrow{v}$ le vecteur normal a $\overrightarrow{u}$ direct. On a $(\Omega_1, (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}))$ un repère orthonormé. Dans ce repère, les équations des cercles sont $C_1 : x^2+y^2 = r^2$ et $C^2 : (x-a)^2+y^2 = (r')^2$ Cest à dire en soustrayant (1) à (2) :
$(x-a)^2 - x^2 = r^2-(r')^2 \iff -a(2x-a) = (r+r')(r-r')$ Comme le cercle admet une intersection on a forcément une solution $\boxed{x_0 = \dfrac{(r+r')(r'-r)}{2a} + \dfrac{a}{2}}$
L'unicité de la solution donne deux choix pour y : $y = \pm\sqrt{r^2-x_0^2}$. On en déduit $\overrightarrow{\Omega_1 A} = x_0\overrightarrow{u} + y_0\overrightarrow{v}$ et

$\overrightarrow{\Omega_1 B} = x_0\overrightarrow{u} - y_0\overrightarrow{v}$ cela donne $\boxed{\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A\Omega_1} + \overrightarrow{\Omega_1 B} = \overrightarrow{\Omega_1 B} - \overrightarrow{\Omega_1 A} = -2y_0\overrightarrow{v}}$ est orthogonal à $\overrightarrow{u} = \dfrac{\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2}}{\Omega_1\Omega_2}$ donc orthogonal à $\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2}$ Finalement (AB) est bien orthogonale à $(\Omega_1\Omega_2)$

<u>Exercice 15</u> : Soit S_1 et S_2 deux sphères de centre Ω_1 et Ω_2 qui ont une intersection non réduite à un seul point :

1) Montrer que l'intersection des deux sphères est contenue dans un seul plan.

2) L'intersection est donc un cercle. Montrer que le centre de ce Cercle appartient à $(\Omega_1\Omega_2)$.

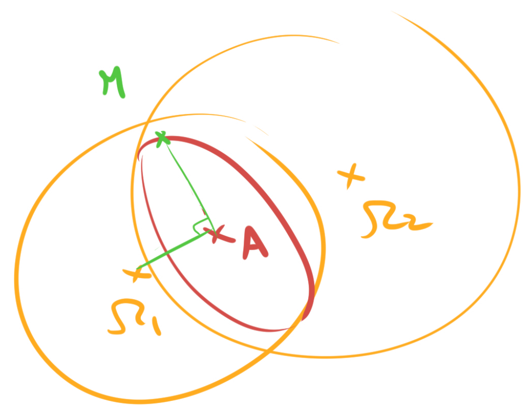
....

1) Même démarche que pour l'exercice précedent, on se met dans une base orthonormée appropriée. On pose $\overrightarrow{u} = \dfrac{\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2}}{\Omega_1\Omega_2}$ qu'on complète en base orthonormée directe $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ et on travaille dans le repère $(\Omega_1, (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}))$. Dans ce repère, les équations des sphères sont $S_1 : x^2+y^2+z^2 = r^2$ et $S^2 : (x-a)^2+y^2+z^2 = (r')^2$ C'est à dire en soustrayant (1) à (2) : $(x-a)^2 - x^2 = r^2 - (r')^2 \iff -a(2x-a) = (r+r')(r-r')$ Comme les sphères admettent une intersection, on a $\boxed{x = \dfrac{(r+r')(r'-r)}{2a} + \dfrac{a}{2}}$ les points d'intersection des sphères sont donc contenues dans le plan d'équation encadrée. A noter que cela est pour les coordonnées du plan dans la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$. Concrètement il s'agit du plan dirigé par $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ (de vecteur normal $\overrightarrow{u}$ et passant par A tel que $\boxed{\overrightarrow{\Omega_1 A} = \left(\dfrac{(r+r')(r'-r)}{2a} + \dfrac{a}{2}\right)\overrightarrow{u}}$.

2) Le centre du Cercle est le point A précédemment mentionné. En effet, on a $\overrightarrow{\Omega_1 A} = \left(\dfrac{(r+r')(r'-r)}{2a} + \dfrac{a}{2}\right)\overrightarrow{u}$ et pour tout point M dans le cercle, on a On a $\|\overrightarrow{AM} + \vec{M\Omega_1}\|^2 = \|\overrightarrow{A\Omega_1}\|^2 = \|\overrightarrow{AM}\|^2 + \|\vec{M\Omega_1}\|^2$ par théorème de Pythagore (M et A sont sur le plan orthogonal à $\overrightarrow{u}$ auquel $\overrightarrow{\Omega_1 A}$ est colinéaire. donc $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{M\Omega_1}$ sont orthogonaux.)

Donc $\|\overrightarrow{AM}\|^2 = \|\overrightarrow{A\Omega_1}\|^2 - \|\vec{M\Omega_1}\|^2 = \|\overrightarrow{A\Omega_1}\|^2 - r^2$, donc la distance AM ne dépend pas de M. Autrement dit, les points M du cercle (qui sont sur S_1 et sur le plan d'intersection avec S_2 en même temps) sont tous à égale distance de A. Donc A est bien le centre du cercle. Par ailleurs, $\overrightarrow{\Omega_1 A}$ est colinéaire à $\overrightarrow{u}$, lui même colinéaire à $\overrightarrow{\Omega_1\Omega_2}$. $\boxed{\text{Donc } A \text{ le centre du cercle est bien sur la droite } (\Omega_1\Omega_2)}$

$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{\Omega_1 A}=0$



$AM^2+\Omega_1A^2=M\Omega_1^2$

$AM^2=\Omega_1A^2-M\Omega_1^2$

<u>Exercice 16</u> : Calculer la distance du point M à la droite ou aux plans suivants :

1) $M:(2,5)$ et $D:2x+8y=2$ **2)** $M:(1,1,1)$, $P:x+2y+3z=1$

3) $M:(2,3)$ et D dirigée par $\vec{u}=\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$ passant par $A:(1,3)$.

4) $M:(1,3)$ et $D:y=6x+12$. **5)** $M:(-1,-1,2)$ et $P:\begin{cases}x=1+t+w\\y=1+2t+w\\z=-1-t+w\end{cases}$

6) u $M:(1,0,5)$, et P de repère $(A,\vec{u},\vec{v})$ avec $A(2,3,-1)$, $\vec{u}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}$

. . . .

1) $\dfrac{|2\cdot 4+8\cdot 5-2|}{\sqrt{4+64}}=\dfrac{46}{\sqrt{68}}\boxed{=\dfrac{23}{\sqrt{17}}}$ **2)** $\dfrac{1+2+3-1}{\sqrt{1+4+9}}=\boxed{\dfrac{5}{\sqrt{14}}}$

3) on a $\vec{n}=\begin{pmatrix}-6\\5\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AM}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $\dfrac{|\overrightarrow{AM}.\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}=\dfrac{|-6+0|}{\sqrt{36+25}}=\boxed{\dfrac{6}{\sqrt{61}}}$

4) $\dfrac{|3-6-12|}{\sqrt{1+36}}=\boxed{\dfrac{15}{\sqrt{37}}}$.

5) $M:(-1,-1,2)$ et P passe par $A=(1,1,-1)$ on a $\overrightarrow{AM}=\begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ et $\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ des vecteurs directeurs de P, on a donc $\vec{n}=\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ est normal à P. Finalement $\dfrac{|\overrightarrow{AM}.\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\boxed{\dfrac{3\sqrt{2}}{2}}$

6) On a $\overrightarrow{AM}=\begin{pmatrix}-1\\-3\\6\end{pmatrix}$ et $\vec{n}=\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\1\\-5\end{pmatrix}$ est normal à P. Finalement $\dfrac{|\overrightarrow{AM}.\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}=\boxed{\dfrac{34}{\sqrt{27}}}$

Exercice 17 : *(Distance à une droite dans l'espace)*
1) Si A est un point de l'espace et D une droite alors démontrer que le projeté orthogonal de A sur D est le point d'intersection de D avec le plan orthogonal à D passant par A.
2) Calculer la distance de $M:(1,2,3)$ avec la droite dirigée par $\overrightarrow{u}=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$ passant par $A:(1,-2,0)$.
3) Calculer la distance de $O:(0,0,0)$ avec la droite $D:\begin{cases}2x+3y-z=1\\x+y+3z=2\end{cases}$

. . . .

1) On appelle H ce point d'intersection. On a pour tout point M de D, $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AH}+\overrightarrow{HM}$ donc d'après le théorème de Pythagore, comme $\overrightarrow{AH}$ (vecteur directeur du plan) et $\overrightarrow{HM}$ (vecteur directeur de la droite) sont orthogonaux, on a $\|\overrightarrow{AM}\|^2=\|\overrightarrow{AH}\|^2+\|\overrightarrow{HM}\|^2\geq\|\overrightarrow{AH}\|^2$ On en déduit que pour tout $M\in D$, $AM\geq AH$ AH est donc un minorant de $d(A,D)$ par ailleurs, comme H est un point de D, le minorant est atteint en H donc AH

2) Le plan orthogonal à D a pour vecteur normal $\overrightarrow{u}=\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix}$ et il passe par M. Il a donc pour équation :

$P:-x+y+2z=7$. On regarde l'intersection avec D dont l'équation paramétrique est : $\begin{cases}x=1-t\\y=-2+t\\z=2t\end{cases}$.

On remplace dans l'équation du plan : $-x+y+2z=7\iff -1+t-2+t+4t=7\iff 6t=10\iff t=\dfrac{5}{3}$

Donc on trouve $H=\left(\dfrac{-2}{3},\dfrac{-1}{3},\dfrac{10}{3}\right)$

Finalement $d(M,D)=AH=\|\overrightarrow{AH}\|=\sqrt{(1+\dfrac{2}{3})^2+(2+\dfrac{1}{3})^2+(3-\dfrac{10}{3})^2}=\dfrac{\sqrt{123}}{3}$ cela donne $\boxed{d(M,D)=\sqrt{\dfrac{41}{3}}}$

3) On fait le pivot : $\begin{cases}2x+3y-z=1\\{\color{red}x}+y+3z=2\end{cases}\iff\begin{cases}{\color{red}x}+y+3z=2\\y-7z=-3\end{cases}\iff\begin{cases}x=+5-10t\\y=-3+7t\\z=t\end{cases}$ Un vecteur directeur est donc $\overrightarrow{u}=\begin{pmatrix}-10\\7\\1\end{pmatrix}$ qui est normal au plan recherché.

Donc $P:-10x+7y+z=0$ (car il passe par O). On cherche l'intersection de D et de P. On a :

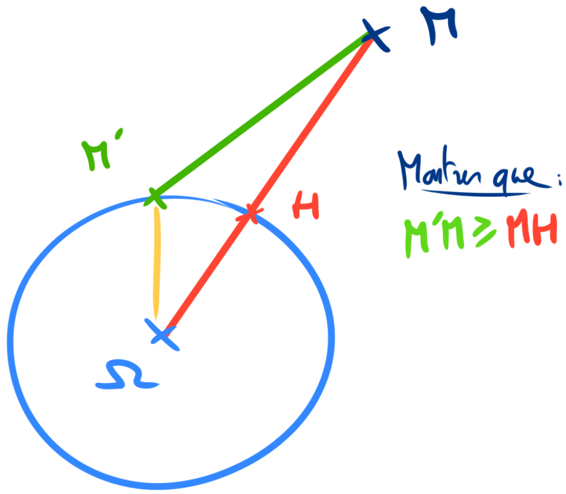
$$\begin{cases}2x+3y-{\color{red}z}=1\\x+y+3z=2\\-10x+7y+z=0\end{cases}\iff\begin{cases}2x+3y-z=1\\7x+{\color{red}10y}=5\\-8x+10y=0\end{cases}\iff\begin{cases}2x+3y-z=1\\7x+10y=5\\-15x=-5\end{cases}\iff\begin{cases}z=7/15\\y=\dfrac{4}{15}\\x=\dfrac{1}{3}\end{cases}$$

L'intersection est donc $H=\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{4}{15},\dfrac{7}{15}\right)$ et la distance est $d(O,D)=OH=\sqrt{\left(\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(\dfrac{4}{15}\right)^2+\left(\dfrac{7}{15}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{90}}{15}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$ on trouve donc $\boxed{d(O,D)=\sqrt{\dfrac{2}{5}}}$

Exercice 18 : *(Distance à un cercle)* Si $\mathcal{C}$ est un cercle alors la distance de $M\in\mathbb{R}^2$ au cercle est donnée par $d(\mathcal{C},M)=\min\{HM\mid H\in\mathcal{C}\}$
1) Calculer la distance de $M:(1,3)$ au cercle de centre $(0,0)$ de rayon 1.
2) Calculer la distance de $M:(2,5)$ au cerlce de centre $(1,2)$ de rayon 4.

. . . .

Si on fait un dessin on voit que la distance minimale de M à un cercle de centre Ω de rayon r est la distance HM où H est le point d'intersection entre le cercle et la droite (ΩM). Démontrons cela. On a $\Omega H=r$ et $\overrightarrow{\Omega H}$ (positivement) colinéaire à $\overrightarrow{\Omega M}$ donc $\overrightarrow{\Omega H}=\lambda\overrightarrow{\Omega M}$ avec $\lambda>0$ et donc $\|\overrightarrow{\Omega H}\|=\lambda\|\overrightarrow{\Omega M}\|$ donne $\lambda=\dfrac{r}{\Omega M}$.



$\underbrace{\Omega M}_{= \underbrace{\Omega H}_{= r} + HM} \leq \Omega M' + M'M = r + M'M.$

donc $r + HM \leq r + M'M$

$\iff HM \leq M'M$

Par ailleurs, si $M' \in C$ alors on a par inégalité triangulaire $\Omega M' + M'M \geq \Omega M$
c'est à dire que $MM' \geq \Omega M - r$. Par ailleurs, comme $\overrightarrow{\Omega H}$ et $\overrightarrow{HM}$ sont colinéaires on a :
$\Omega M = \Omega H + HM = r + HM$ (l'égalité dans l'inégalité triangulaire s'obtient si et seulement si les vecteurs sont positivement liés, comme c'est le cas ici).
Ainsi : $\forall M' \in \mathbb{C}$, $MM' \geq \Omega M - r = r + HM - r = HM$. On trouve que HM est un minorant de la distance MM' où $M' \in \mathbb{C}$. Par ailleurs il est atteint quand $M' = H$, on a donc :
$d(M, C) = HM = \|\overrightarrow{\Omega H} - \overrightarrow{\Omega M}\| = \|(\lambda - 1)\overrightarrow{\Omega M}\| = |\lambda - 1|\Omega M = \left|\frac{r}{\Omega M} - 1\right| \cdot \Omega M = |r - \Omega M|.$

Finalement : $\boxed{d(M, C) = |r - \Omega M|}$

1) Ca tombe tout de suite avec la formule $\Omega M = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10} > r = 1$ donc $\boxed{d(M, C) = \sqrt{10} - 1}$

2) Cette fois on a $\Omega M = \sqrt{(2-1)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{10} < r = 4$ donc $\boxed{d(M, C) = 4 - \sqrt{10}}$
