TD 12 - Polynômes - Corrigé

1BCPST 2 — Feuille d'exercice — Année 2022- 2023

Exercice 1 : *(degré ★)* On donne $d^\circ P = n \in \mathbb{N}$. Donner le degré des polynômes suivants :
1) $P \cdot X^2$ **2)** $(P(X^2))^3$ **3)** $P^3(X^2)$ **4)** $P \cdot P'(X+1) - P''$ **5)** $P^4 + 2P^2 + 1$ **6)** $P \cdot (P'' - 2P')$
7) $P \circ P'(X^3+1)$ **8)** $P(X^2) - P'(X^3)$ **9)** $P - P'P''$ **10)** $\sum_{k=0}^{2n} P^k(X^2+1)$

. . . .

Réponses : **1)** $d^\circ(P \cdot X^2) = d^\circ P + d^\circ X^2 = \boxed{n+2}$ et $c(X^2P) = c(X^2)c(P) = \boxed{a}$

2) $d^\circ(P(X^2))^3 = 3d^\circ(P \circ X^2) = 3d^\circ P d^\circ X^2 = \boxed{6n}$ et $c(P(X^2)^3) = c(P \circ X^2)^3 = c(P)^3 c(X^2)^3 = \boxed{a^3}$

3) C'est pareil que la 2) car $P^3(X^2) = P^3 \circ X^2 = (P(X^2))^3$.

4) $d^\circ(PP'(X+1)) = d^\circ P + d^\circ P' d^\circ(X+1) = d^\circ P + d^\circ P' = 2n-1$ et $d^\circ P'' = n-2$. Or $2n-1 > n-2 \iff n > -1$ c'est donc toujours vrai car $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, $d^\circ(P \cdot P'(X+1) - P'') = \max(2n-1, n-1) = \boxed{2n-1}$
On a donc $c(P \cdot P'(X+1) - P'') = c(P \cdot P'(X+1)) = c(P)c(P') = \boxed{na^2}$.

5) <u>1er cas :</u> Si $n \geq 1$, alors $d^\circ P^4 = 4n > d^\circ P^2 = 2n$ donc $d^\circ(P^4+2P^2+1) = \max(d^\circ P^4, d^\circ P^2, d^\circ 1) = d^\circ P^4 = 4n$
Par ailleurs on a $c(P^4 + 2P^2 + 1) = c(P^4) = c(P)^4 = a^4$.
<u>2e cas :</u> Si $n = 0$ alors $P = a$ et $a^4 + 2a^2 + 1 = (a^2+1)^2$ n'est pas nul car $a^2 + 1 > 0$
donc $d^\circ(P^4 + 2P^2 + 1) = 0 = 4n$
Ainsi dans tous les cas $\boxed{d^\circ(P^4 + 2P^2 + 1) = 4n}$ et on a par ailleurs $\boxed{c(P) = \begin{cases} a^4 \text{ si } n \geq 1 \\ (a^2+1)^2 \text{ si } n = 0 \end{cases}}$

6) $d^\circ(P'' - 2P') = \max(d^\circ P'', d^\circ 2P') = \max(n-2, n-1) = n-1$ ainsi $d^\circ(P(P'' - 2P')) = \boxed{n(n-1)}$
et $c(P(P'' - 2P')) = c(P)c(P'' - 2P') = c(P)c(2P') = 2c(P)c(P') = \boxed{2na^2}$

7) $d^\circ(P \circ P'(X^3+1)) = d^\circ P d^\circ(P' \circ (X^3+1)) = d^\circ P d^\circ P' d^\circ(X^3+1) = \boxed{3n(n-1)}$
$c(P \circ P'(X^3+1)) = c(P \circ P')c(X^3+1)^{n-1} = c(P)c(P')^n = an^n a^n = \boxed{n^n a^{n+1}}$

8) On a $d^\circ P(X^2) = 2n$ et $d^\circ P'(X^3) = 3(n-1)$ or $2n > 3(n-1) \iff 2n > 3n-3 \iff 3 > n$. On a donc trois cas à gérer : <u>1er cas :</u> $n \leq 2$, alors $d^\circ(P(X^2) - P'(X^3)) = \max(3n-3, 2n) = 2n$. On a ensuite $c(P(X^2) - P'(X^3)) = c(P(X^2)) = a$
<u>2eme cas :</u> $n \leq 4$, alors $d^\circ(P(X^2) - P'(X^3)) = \max(3n-3, 2n) = 3n-3$. On a ensuite $c(P(X^2) - P'(X^3)) = c(P'(X^3)) = na$
<u>3eme cas :</u> $n = 3$, on a alors $3n - 3 = 2n = 6$ et $c(P'(X^3)) = 3a \neq c(P) = a$ car $a \neq 0$
ainsi $d^\circ(P(X^2) - P'(X^3)) = 6$ et $c(P(X^2) - P'(X^3)) = c(P(X^2)) - c(P'(X^3)) = -2a$

Pour résumer : $\boxed{d^\circ(P(X^2) - P'(X^3)) = \begin{cases} 2n & \text{si } n < 3 \\ 3n-3 & \text{si } n > 3 \\ 6 & \text{si } n = 3 \end{cases} \text{ et } c(P(X^2) - P'(X^3)) = \begin{cases} a & \text{si } n < 3 \\ na & \text{si } n > 3 \\ -2a & \text{si } n = 3 \end{cases}}$

9) $d^\circ P'P'' = (n-1)(n-2)$. On a $d^\circ P > d^\circ P'P'' \iff n > (n-1)(n-2) \iff n > n^2 - 3n + 2 \iff 0 > n^2 - 2n + 2 = (n-1)^2 + 1$ c'est donc impossible. Ainsi on a $d^\circ(P - P'P'') = \boxed{(n-1)(n-2)}$.
Par ailleurs $c(P - P'P'') = c(P'P'') = c(P')c(P'') = nan(n-1)a = \boxed{n^2(n-1)a^2}$

10) <u>1er cas</u> : Si $n > 0$ alors $d^\circ P^k(X^2+1) = kd^\circ(P)d^\circ(X^2) = 2kn$. Le plus grand est donc obtenu quand $k = 2n$. Ainsi $d^\circ(\sum_{k=0}^{2n} P^k(X^2+1)) = 4n^2$.

Par ailleurs $c(\sum_{k=0}^{2n} P^k(X^2+1)) = c(P^{2n}(X^2+1)) = a^{2n}$

<u>2eme cas</u> : Si $n=a$ alors $P=a$ et $\sum_{k=0}^{2n} P^k(X^2+1) = \sum_{k=0}^{2n} a = (2n+1)a = a \neq 0$

donc $d^\circ\left(\sum_{k=0}^{2n} P^k(X^2+1)\right) = 0 = 4n^2$ et $c\left(\sum_{k=0}^{2n} P^k(X^2+1)\right) = a$

Ainsi dans tous les cas $\boxed{d^\circ\left(\sum_{k=0}^{2n} P^k(X^2+1)\right) = 4n^2}$ et $\boxed{c\left(\sum_{k=0}^{2n} P^k(X^2+1)\right) = \begin{cases} a^{2n} \text{ si } n \geq 1 \\ a \text{ si } n=0 \end{cases}}$

<u>Exercice 2</u> : *(1 minute)* Factoriser les polynômes suivants dans $\mathbb{R}$:
1) $X^2+7X+12$ **2)** $X^2-100X+2500$ **3)** $15X^2+75X+60$ **4)** $X^3-10X^2+27X-18$
5) X^3-2X^2+X-2 **6)** $X^4+8X^3+21X^2+22X+8$ **7)** X^5-2X^3-63X

....

Réponses : **1)** $(X+4)(X+3)$ **2)** $(X-50)^2$ **3)** $15(X+4)(X+1)$ **4)** $(X-1)(X-3)(X-6)$
5) $(X-2)(X^2+1)$ **6)** $(X+1)^2(X+2)(X+4)$ **7)** $X(X-3)(X+3)(X^2+49)$

<u>Exercice 3</u> : *(Factorisations plus compliquées)* Factoriser les polynômes suivants dans $\mathbb{R}$:
1) $X^5-12X^4+44X^3-38X^2-45X+50$ **2)** $X^3+15X^2+75X+125.$ **3)** X^6-19X^3-216
4) $X^4+2X^3+2X^2+X^2+2X+2$ **5)** $X^4-4X^3-26X^2+30X-225$

....

Réponses : **1)** Méthode classique, il y a juste beaucoup de racines. $\boxed{(X+1)(X-1)(X-2)(X-5)^2}$

2) $X^3+15X^2+75X+125 = X^3+3\cdot 5X^2+3\cdot 5^2X+5^3 = \boxed{(X+5)^3}$ (identité remarquable)

3) On fait le changement de variable $Y=X^3$: $X^6-19X^3-216 = Y^2-19Y-216$

on trouve $(Y-8)(Y-27) = (X^3-8)(X^3-27) = \boxed{(X-2)(X-3)(X^2+2X+4)(X^2+3X+9)}$.

4) En faisant des essais on remarque qu'on tombe toujours sur un polynôme positif, il faut croire qu'il ne s'annule pas. On peut donc chercher des racines complexes. C'est gagné avec i qui est racine ! Dès lors $-i$ est aussi racine (car c'est le conjugué) on peut donc factoriser par $(X-i)(X+i) = X^2+1$.
On trouve $X^4+2X^3+2X^2+X^2+2X+2 = \boxed{(X^2+1)(X^2+2X+2)}$

5) $\boxed{(X+5)^2(X-3)^2}$

<u>Exercice 4</u> : *(Factorisation de degré n)* Factoriser sur $\mathbb{R}$ les polynômes $X^{2n}+1$ et $X^{2n+1}+1$

....

Réponse : On a $x^{2n} = -1 = e^{i\pi} \iff \exists k \in [\![0, 2n-1]\!] \mid x_k = e^{i\frac{(2k+1)\pi}{2n}}$ (voir le cours sur les racines n^{ieme} de nombre complexes)
On remarque par ailleurs que $\overline{x_k} = x_{2n-1-k}$ (là encore se référer au cours sur les racines complexes) donc $(X-x_k)(X-x_{n-k}) = (X-x_k)(X-\overline{x_k}) = X^2 - 2\text{Re}(x_k)X + |x_k| = X^2 - 2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)X + 1$.
On a donc $X^{2n}+1 = \prod_{k=0}^{2n-1} X - x_k = \prod_{k=0}^{n-1}(X-x_k)\cdot\prod_{k=n}^{2n-1}(X-x_k) \underbrace{=}_{j=2n-1-k} \prod_{k=0}^{n-1}(X-x_k)\cdot\prod_{j=0}^{n-1}(X-x_{2n-1-j}) =$
$\prod_{k=0}^{n-1}(X-x_k)(X-\overline{x_k}) = \prod_{k=0}^{n-1} X^2 - 2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)X+1$

Finalement $\boxed{X^{2n}+1=\prod_{k=0}^{n-1}\left(X^2-2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)X+1\right)}$

De même $x^{2n+1}=-1=e^{i\pi} \iff \exists k\in[\![0,2n]\!] \mid x_k=e^{i\frac{(2k+1)\pi}{2n+1}}$ et $x_{2n-k}=\overline{x_k}$

On remarque que $x_n=e^{i\frac{(2n+1)\pi}{2n+1}}=e^{i\pi}=-1$.

On a donc $X^{2n+1}+1=\prod_{k=0}^{2n}X-x_k=\prod_{k=0}^{n-1}(X-x_k)\cdot(X-x_n)\cdot\prod_{k=n+1}^{2n}(X-x_k)\underbrace{=}_{j=2n-k}\prod_{k=0}^{n-1}(X-x_k)\cdot(X+1)\cdot$
$\prod_{j=0}^{n-1}(X-x_{2n-j})=(X+1)\prod_{k=0}^{n-1}(X-x_k)(X-\overline{x_k})=(X+1)\prod_{k=0}^{n-1}X^2-2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n+1}\right)X+1$

Finalement $\boxed{X^{2n+1}+1=(X+1)\prod_{k=0}^{n-1}\left(X^2-2\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n+1}\right)X+1\right)}$

Exercice 5 : Soit P un polynôme. Montrer que $P(X^n)$ est factorisable par X^n-1 si et seulement si $P(X)$ est factorisable par $X-1$.

....

Réponses : $\boxed{\Longrightarrow]}$ Si $P(X^n)=(X^n-1)Q$ alors en $X=1$ on trouve $P(1)=0$ donc 1 est racine de P. donc $\boxed{P \text{ se factorise par } X-1}$.

$\boxed{\Longleftarrow]}$ On a $X^n-1=\prod_{k=0}^{n-1}(X-x_k)$ où $x_k=e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ (voir le cours sur les racines n^{ieme} de nombre complexes).
Donc X^n-1 divise $P(X^n)$ si et seulement si x_k est racine de $P(X^n)$ pour tout $k\in[\![0,n-1]\!]$. Or, on a $P(x_k^n)=P(1)=0$ car$X-1$ divise P. Donc x_k est bien racine de $P(X^n)$. Ceci étant vrai pour tout k, on a bien $\boxed{X^n-1 \text{ divise } P}$.

Exercice 6 : Trouver tous les polynômes P qui vérifient l'égalité suivante :
1) $P=P'+X^2$ **2)** $P(X^2)=(X^2+1)P$ **3)** $(P')^2=4P$ **4)** $P=P'P''$ **5)** $P(X+1)=P(X)$.
6) $XP'+P=X^2+1$ **7)** $(X^2+1)P'-2XP=2X$ **8)** $P^2=P(X^2)$ **9)** $\exists Q\in\mathbb{R}[X] \mid P=QP'$

....

Réponses : **1)** On a $d^\circ(P-P')=2 \iff d^\circ P=2$. On pose donc $P=aX^2+bX+c$ et on trouve : $aX^2+bX+c=X^2+2aX+b$. Cela donne le système :
$\begin{cases}a=1\\b=2a\\c=b\end{cases} \iff \begin{cases}a=1\\b=2\\c=2\end{cases}$ Donc $\boxed{P=X^2+2X+2}$ est la seule possibilité.

2) On a $2d^\circ P=d^\circ P+2 \iff d^\circ P=2$ donc $P=aX^2+bX+c$. On a donc :
$P(X^2)=aX^4+bX^2+c=(X^2+1)P=aX^4+bX^3+(c+a)X^2+bX+c$ et on résout le système :
$\begin{cases}a=a\\b=0\\c+a=b\\b=0\\c=c\end{cases} \iff \begin{cases}b=0\\c=-a\end{cases}$ Donc $\boxed{P=a(X^2-1) \text{ avec } a\in\mathbb{R}}$

3) On a $2d^\circ P'=2d^\circ P-2=d^\circ P \iff d^\circ P=2$ donc $P=aX^2+bX+c$ avec $a\neq 0$. On a alors $P'=2aX+b$ donc $(P')^2=4aX^2+4abX+b^2=4P=4aX^2+4bX+4c$ On résout : $\begin{cases}4a=4a\\4ab=4b\\b^2=4c\end{cases} \iff$
$\begin{cases}b=0\\c=0\end{cases}$ ou $\begin{cases}b\neq 0\\a=1\\c=\frac{b^2}{4}\end{cases}$ Donc $\boxed{P=aX^2 \text{ avec } a\in\mathbb{R} \text{ ou } P=X^2+bX+\frac{b^2}{4} \text{ avec } b\in\mathbb{R}}$

4) On a $d°P = d°P' + d°P'' = 2d°P - 3 \iff d°P = 3$ donc $P = aX^3 + bX^2 + cX + d$ avec $a \neq 0$ et en dérivant on obtient $P' = 3aX^2 + 2bX + c$ et $P'' = 6aX + 2b$ donc
$P'P'' = 18a^2X^3 + 12abX^2 + 6acX + 6abX^2 + 4b^2X + 2bc = 18a^2X^3 + 18abX^2 + (6ac + 4b^2)X + 2bc$ On résout : $\begin{cases} 18a^2 = a \\ 18ab = b \\ 6ac + 4b^2 = c \\ 2bc = d \end{cases} \iff \begin{cases} a(18a-1) = 0 \\ 18ab = b \\ 6ac + 4b^2 = c \\ 2bc = d \end{cases} \iff \begin{cases} a = \dfrac{1}{18} \\ b = b \\ \dfrac{c}{3} + 4b^2 = c \\ 2bc = d \end{cases} \iff \begin{cases} a = \dfrac{1}{18} \\ c = 6b^2 \\ 12b^3 = d \end{cases}$

Finalement on trouve que $\boxed{P = \frac{1}{18}X^3 + bX^2 + 6b^2X + 12b^3}$ avec $b \in \mathbb{R}$.

5) On a un polynôme périodique de période 1, donc la seule possibilité est $\boxed{P = a \in \mathbb{R}}$ un polynôme constant (voir cours).

6) C'est une équation différentielle. On la résout comme d'habitude : $y' + \frac{1}{x}y = x + \frac{1}{x}$. La solution homogène est $y_h(x) = \lambda e^{-\ln|x|} = \frac{\lambda}{x}$ si on la résout sur $\mathbb{R}_+^*$.
On a cherche par ailleurs une solution particulière $y_p(x) = \frac{\lambda(x)}{x}$ qui donne $\frac{\lambda'(x)}{x} = x + \frac{1}{x} \iff \lambda'(x) = x^2 + 1$
On peut donc choisir $\lambda(x) = \frac{x^3}{3} + x$ et $y_p(x) = \frac{x^2}{3} + 1$.
On a donc pour solution générale $y(x) = \frac{x^2}{3} + 1 + \frac{\lambda}{x}$. Mais nous cherchons les solutions polynômiales. Il faut qu'elles soient définies en 0 et donc $\lambda = 0$. On a donc pour solution $\boxed{P = \frac{1}{3}X^2 + 1}$

7) C'est encore une equation différentielle. On a une solution particulière évidente $y_p(x) = 1$. Pour la solution homogène, regardons $y' - \frac{2x}{x^2+1}y = 0$. On a $a(x) = -\frac{2x}{x^2+1}$ donc $A(x) = -\ln(x^2+1)$ et $y_H(x) = \lambda(x^2+1)$ et donc $y(x) = \lambda(x^2+1) + 1$. Finalement, les polynômes solutions sont $\boxed{P = \lambda X^2 + \lambda + 1 \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R}}$

8) On a $d°(P^2) = 2d°P = d°P(X^2)$ donc au niveau des degrés c'est cohérent. On remarque par ailleurs que cela marche sur les monômes : si $P = X^n$, on a $P^2 = X^{2n} = P(X^2)$. Si $c(P)$ est le coefficient dominant de P on a $c(P^2) = c(P)^2 = c(P)$ donc $c(P) = 1$ ou $c(P) = 0$ (pour le polynôme nul).

Supposons que $\alpha \in \mathbb{C}$ est une racine de P. Alors $P(\alpha^2) = P(\alpha)^2 = 0$ donc α^2 est aussi racine de P. Par récurrence immédiate, on aura α^{2^n} racine de P pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc, si $\alpha \neq 0$ ou $|\alpha| \neq 1$ on a une infinité de racines de P distinctes. C'est impossible si $P \neq 0$.
Par ailleurs, considérons par l'absurde le cas où $|\alpha| = 1$, c'est à dire $\alpha = e^{i\theta}$:
on a $\alpha^{2^n} = \alpha^{2^p} \iff 2^n\theta = 2^p\theta + 2k\pi \iff \theta = \frac{2k\pi}{2^{n-p}}$ donc $\alpha = e^{\frac{ik\pi}{2^{n-p}}}$ et $\alpha^{2^{n+p+1}} = 1$ est racine de P.
Donc $X - 1$ divise P. Donc $(X-1)^2$ divise P^2 et divise $P(X^2)$.
On y est presque. On a donc dans ce cas $P(X) = (X-1)^rQ(X)$ avec r l'ordre de multiplicité de 1 pour P et $P(X^2) = (X-1)^{2r}R(X) = (X^2-1)^rQ(X^2) \implies (X+1)^rQ(X^2) = (X-1)^rR(X)$ Donc $Q(1) = 0$ et $(X-1)$ divise Q et $P(X) = (X-1)^{r+1}Q_1$ C'est impossible car on a dit que r était la multiplicité de 1 pour P, donc le plus grand entier tel qu'on puisse factoriser par $(X-1)^r$.
La seule racine complexe possible pour P est donc $\alpha = 0$, donc $\boxed{P = X^n \text{ avec } n \in \mathbb{N} \text{ ou } P = 0}$.

9) Posons$n = d°P$ et supposons que $P = QP'$, on a alors $d°Q = d°P - d°P' = 1$ donc $Q = \lambda(X-a)$.
Or $c(P') = nc(P) = n \cdot \lambda c(P')$. On en déduit $\lambda = \frac{1}{n}$.
Par ailleurs $P' = (QP')' = \frac{1}{n}((X-a)P'' + P') \iff P' - \frac{1}{n}P' = \frac{1}{n}(X-a)P''$ Donc $P' = \frac{1}{n-1}(X-a)P''$.
On voit qu'on va pouvoir réitérer l'opération.
On montre par récurrence que si $k < n$ $P^{(k)} = \frac{1}{n-k}(X-a)P^{(k+1)}$. <u>Initialisation :</u> C'est clairement vrai au rang $k = 0$ par hypothèse.

Hérédité : Si c'est vrai au rang k alors supposons $k+1 < n$, $P^{(k+1)} = \dfrac{1}{n-k}(X-a)P^{(k+2)} + \dfrac{1}{n-k}P^{(k+1)} \iff P^{(k+1)}\left(1 - \dfrac{1}{n-k}\right) = \dfrac{1}{n-k}(X-a)P^{(k+2)} \iff P^{(k+1)}\left(\dfrac{n-k-1}{n-k}\right) = \dfrac{1}{n-k}(X-a)P^{(k+2)} \iff P^{(k+1)} = \dfrac{1}{n-(k+1)}(X-a)P^{(k+2)}$ car $k+1 < n \iff 0 < n-(k+1)$. C'est donc vrai au rang $k+1$.

On a donc pour tout $k \in [\![0, n-1]\!]$, $P^{(k)}(a) = 0$ donc a est une racine d'ordre n de P. Finalement $\boxed{P = \lambda(X-a)^n \text{ avec } a, \lambda \in \mathbb{R} \text{ et } n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 7 : On pose $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}X^k$. Montrer que P_n n'admet pas de racines multiple.

. . . .

Réponse : On a $P_n' = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{k!}X^{k-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k-1)!}X^{k-1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}X^k = P_{n-1}$. Supposons par l'absurde que P_n admet une racine multiple. On a alors $P_n(a) = P_n'(a) = 0$ alors $P_n'(a) = P_{n-1}(a) = 0$ donc $P_n(a) - P_{n-1}(a) = 0 = \dfrac{a^n}{n!}$ car $P_{n-1} = \dfrac{1}{n!}X^n$. On en déduit $a^n = 0$, donc $a = 0$ est la seule possibilité. Or $P_n(0) = \dfrac{1}{0!} = 1$, donc 0 n'est pas racine de P_n.

Conclusion : $\boxed{P_n \text{ ne peut pas admettre de racine multiple}}$.

Exercice 8 : *(Suite de polynômes)* On définit une suite de polynômes $(P_n)_n$ par :

$$P_0 = 1 \ , \ P_1 = X \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} \ , \ P_{n+2} + P_n = 2XP_{n+1}$$

1) Calculer P_2 et P_3
2) Déterminer le degré et le coefficient dominant de P_n.
3) Déterminer la parité de P_n et calculer $P_n(1)$.

. . . .

Réponse : **1)** $P_2 = 2X^2 - 1$ et $P_3 = 4X^3 - 3X$

2) On montre par récurrence que $c(P_n) = 2^{n-1}$ si $n \geq 1$ et que $d^\circ P_n = n$.
Initialisation : C'est vrai pour $n = 1$ et pour $n = 2$ d'après les calculs précédents.
Hérédité : Supposons que c'est vrai aux rangs n et $n+1$. On a $d^\circ(2XP_n + 1) = n+2 > d^\circ P_n$ donc $d^\circ P_{n+2} = d^\circ(2XP_{n+1} - P_n) = n+2$. On a par ailleurs, $c(P_{n+2}) = c(2XP_{n+1}) = 2c(X)c(P_{n+1}) = 2 \cdot 1 \cdot 2^n = 2^{n+1}$ donc c'est vrai au rang $n+2$.
Finalement $\boxed{d^\circ P_n = n \text{ et } c(P_n) = 2^{n-1} \text{ si } n \geq 1}$

3) On montre par récurrence que P_n a la même parité que n :
Initialisation : C'est vrai pour $n = 0$: P_0 est paire et pour $n = 1$: P_1 est impaire.
Hérédité : Supposons que ce soit vrai aux rangs n et $n+1$. Si $n+2$ est pair alors P_n est paires, P_{n+1} est impaire et XP_{n+1} est paire. Donc $P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n$ est paire.
Si $n+2$ est impaire, de même P_n est impaire, P_{n+1} est paire donc XP_{n+1} est paire donc $P_{n+2} = 2XP_{n+1} - P_n$ est impaire.

Conclusion : $\boxed{P_{2p} \text{ est paire et } P_{2p+1} \text{ est impaire pour tout } p \in \mathbb{N}.}$

On montre par récurrence que $P_n(1) = 1$:
Initialisation : C'est vrai pour $n = 0$ et pour $n = 1$: $P_0(1) = P_1(1) = 1$
Hérédité : Supposons que ce soit vrai aux rangs n et $n+1$. Alors $P_{n+2}(1) = 2 \cdot P_{n+1}(1) - P_n(1) = 2 - 1 = 1$.
C'est donc vrai au rang $n+2$

Conclusion $\boxed{\forall n \in \mathbb{N} \ , \ P_n(1) = 1}$

<u>Exercice 9</u> : *(Polynômes de Tchebytchev)* Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on veut montrer qu'il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \cos(n\theta) = T_n(\cos(\theta))$$

1) S'il existe, prouver l'unicité d'un tel polynôme T_n.
2) Exprimer T_{n+2} en fonction de T_{n+1} et T_n, en déduire l'existence de ces polynômes.
3) En déduire l'existence de T_n. Quel est le degré de T_n, quel est son coefficient dominant ?
4) Quelle est la parité de T_n ?
5) Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que $x \to \cos(n\mathrm{Arccos}(x))$ est une fonction polynômiale en x.
6) Montrer que T_n admet n racines. Trouver un majorant et un minorant des racines de T_n.

. . . .

Réponses :
1) Supposons qu'il en existe deux alors : $\forall \theta \in \mathbb{R}\ , T_n(\cos(\theta)) = P_n(\cos(\theta)) = \cos(n\theta) \iff (T_n - P_n)(\cos(\theta)) = 0$. Donc $\cos\theta$ est une racine de $T_n - P_n$ pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, cela fait une infinité de racines pour $T_n - P_n$, donc $T_n - P_n = 0$. C'est à dire $\boxed{T_n = P_n}$. D'où l'unicité

2) On a $\cos((n+1)\theta)\cos\theta = \dfrac{1}{4}\left(e^{in+1\theta} + e^{-in+1\theta}\right)\left(e^{i\theta} + e^{i\theta}\right) = \dfrac{1}{4}(e^{i(n+2)\theta} + e^{-in\theta} + e^{in\theta} + e^{-i(n+2)\theta} = \dfrac{1}{2}(\cos((n+2)\theta) + \cos(n\theta)$.
On a donc $T_{n+2}(\cos\theta) = 2\cos\theta T_{n+1}(\cos\theta) - T_n(\cos\theta)$. Et donc $\boxed{T_{n+2} = 2XT_{n+1} - T_n}$ donne le résultat.

On remarque que c'est la même relation de récurrence que l'exercice précédent dès lors : T_n est bien défini (par récurrence) et les questions suivantes ont été résolues.
3) $\boxed{d^\circ T_n = n \text{ et } c(T_n) = 2^{n-1} \text{ si } n \geq 1.}$ (voir exercice précédent)
4) $\boxed{T_n \text{ a la même parité que } n}$ (voir exercice précédent)
5) On a $\boxed{cos(n\arccos(x)) = T_n(\cos(\arccos(x))) = T_n(x)}$ donc c'est bien un polynôme.
6) On a $\cos(n\theta) = 0 \iff n\theta = \pm\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \iff n\theta = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \iff \theta = \dfrac{(2k+1)\pi}{2n} = \theta_k$.

Or on a $\cos(\theta_k) = \cos(\theta_j) \iff \left\{\begin{array}{l} \theta_k = -\theta_j + 2l\pi \\ \text{ou} \\ \theta_k = \theta_j + 2l\pi \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} \dfrac{(2k+1)\pi}{2n} = -\dfrac{(2j+1)\pi}{2n} + 2l\pi \\ \text{ou} \\ \dfrac{(2k+1)\pi}{2n} = \dfrac{(2j+1)\pi}{2n} + 2l\pi \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 2k+1 = -2j-1+4nl \\ \text{ou} \\ k = j + 2nl \end{array}\right.$

$\iff \left\{\begin{array}{l} k = -j-1+2nl \\ \text{ou} \\ k = j+2nl \end{array}\right.$ $\boxed{\text{Les racines distinctes de } T_n \text{ sont donc } \cos(\theta_k) \text{ pour } k \in [\![0, n-1]\!]}$
en effet $\theta_n = 2\pi - \theta_{n-1}$ et donc $\cos\theta_n = \cos\theta_{n-1}$. $\boxed{\text{Les racines de } T_n \text{ sont toutes comprises entre } -1 \text{ et } 1.}$.

<u>Exercice 10</u> : *(Cotangente)* Pour $\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, on pose cotan $\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{1}{\tan\theta}$.
1) Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe un unique polynôme P_n tel que :

$$\forall \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\ ,\ \sin((2n+1)\theta) = (\sin\theta)^{2n+1} P_n(\text{cotan}^{\ 2}\,\theta)$$

2) Expliciter P_n
3) Trouver les racines de P_n et en déduire que P_n est un polynôme scindé.
4) En déduire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \text{cotan}^{\ 2} \frac{k\pi}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{3}$
5) Démontrer que $\forall a \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$, on a $\text{cotan}^{\ 2}\, a \leq \dfrac{1}{a^2} \leq 1 + \text{cotan}^{\ 2}\, a$
6) Prouver que $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$

. . . .
Réponses :

1) On a $\sin((2n+1)\theta)=\mathrm{Im}(e^{i(2n+1)\theta})$. Or $e^{i(2n+1)\theta}=(e^{i\theta})^{2n+1}=\sum_{k=0}^{2n+1}\binom{2n+1}{k}i^k\sin^k(\theta)\cos^{2n+1-k}\theta$

$=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k}i^{2k}\sin^{2k}(\theta)\cos^{2n+1-2k}(\theta)+\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}i^{2k+1}\sin^{2k+1}(\theta)\cos^{2n+1-2k-1}(\theta)$

$=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k}(-1)^k\sin^{2k}(\theta)\cos^{2n+1-2k}\theta+i\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}(-1)^k\sin^{2k+1}(\theta)\cos^{2n-2k}\theta.$

On en déduit $\sin((2n+1)\theta)=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}(-1)^k\sin^{2k+1}(\theta)\cos^{n-2k-1}\theta$

$=\sin^{2n+1}(\theta)\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}(-1)^k\sin^{2k-2n}(\theta)\cos^{2n-2k}\theta=\sin^{2n+1}(\theta)\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}(-1)^k(\text{cotan }\ \theta)^{2(n-k)}.$

Finalement on trouve $\boxed{P_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}(-1)^kX^{n-k}}$

2) On peut garder l'expression du dessus, mais le changement de variable $k'=n-k$ donne : $\boxed{P_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k}(-1)^{n-k}X^k}$

3) On a $\sin((2n+1)\theta)=0 \iff (2n+1)\theta_k=k\pi\ ,\ k\ in\mathbb{Z} \iff \theta_k=\dfrac{k\pi}{(2n+1)}$. Par ailleurs, cotan ^{2} étant π-périodique et paire, on a cotan $^2\,\theta_k=$ cotan $^2\,\theta_j \iff \left\{\begin{array}{l}\theta_k=-\theta_j+l\pi\\ \text{ ou}\\ \theta_k=\theta_j+l\pi\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}k\pi=-j\pi+l(2n+1)\pi\\ \text{ ou}\\ k\pi=j\pi+l(2n+1)\pi\end{array}\right. \iff$

$\left\{\begin{array}{l}k=-j+l(2n+1)\\ \text{ ou}\\ k=j+l(2n+1)\end{array}\right.$

Les nombres cotan $^2(\theta_k)$ avec $k\in[\![1,n]\!]$ sont donc distincts car si $k,j\in[\![1,n]\!]$, on a $2\le k+j\le 2n$ donc on n'est pas dans le cas où $k+j=(2n+1)l$, et par ailleurs, $-(2n+1)<1-n\le k-j\le n-1<2n+1$ donc on n'est pas non plus dans le cas où $k-j=(2n+1)l$.

$\boxed{\text{cotan }^2(\theta_k)\text{ avec }k\in[\![1,n]\!]\text{ sont donc les racines deux à deux distinctes de }P_n.\ P_n\text{ est donc scindé.}}$

4) $\sum_{k=1}^{n}\text{cotan }^2\dfrac{k\pi}{2n+1}$ correspond à la somme des racines du polynômes et donc à son coefficient devant X^{n+1} divisé par le coefficient dominant : on a $P_n=\binom{2n+1}{2n}(-1)^n\prod_{k=0}^{n}\left(X-\text{cotan }^2\dfrac{k\pi}{2n+1}\right)$

On a donc $-\dfrac{a_{n-1}}{a_n}=-\dfrac{(-1)^{n-1}\binom{2n+1}{2n-2}}{(-1)^n(2n+1)}=\dfrac{\binom{2n+1}{3}}{2n+1}=\dfrac{2n(2n-1)}{6}=\boxed{\dfrac{n(2n-1)}{3}}$.

5) On a $\forall x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, $\tan x\ge x \implies \tan^2x>x^2 \implies \dfrac{1}{\tan^2x}<\dfrac{1}{x^2} \implies$ cotan $^2(x)<\dfrac{1}{x^2}$ Par ailleurs, $1+\text{cotan }^2(x)=\dfrac{1}{\sin^2(x)}$ or $\forall x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$, $\sin(x)\le x \implies \sin^2(x)\le x^2 \implies \dfrac{1}{\sin^2(x)}\ge\dfrac{1}{x^2}$. On trouve donc bien : $\boxed{\forall x\in\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[\ ,\text{cotan }^2x\le\dfrac{1}{x^2}\le\text{cotan }^2x+1}$

Remarque : les résultats $\tan x\ge x$ et $\sin x\le x$ se montrent par exemple avec une étude de fonction...

6) On a $\sum_{k=1}^{n}\text{cotan }^2\dfrac{k\pi}{2n+1}\le\sum_{k=1}^{n}\dfrac{(2n+1)^2}{k^2\pi^2}\le\sum_{k=1}^{n}\text{cotan }^2\dfrac{k\pi}{2n+1}+1=n+\sum_{k=1}^{n}\text{cotan }^2\dfrac{k\pi}{2n+1}$

D'après les calculs de la question 4), on trouve donc : $\dfrac{n(2n-1)}{3}\le\sum_{k=1}^{n}\dfrac{(2n+1)^2}{k^2\pi^2}\le n+\dfrac{n(2n-1)}{3}$

$\iff \dfrac{n(2n-1)\pi^2}{3(2n+1)^2}\le\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k^2}\le\dfrac{n\pi^2}{(2n+1)^2}+\dfrac{n(2n-1)\pi^2}{3(2n+1)^2}.$

Or on a $\dfrac{n(2n-1)\pi^2}{3(2n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\pi^2}{6}$ et $\dfrac{n\pi^2}{(2n+1)^2} + \dfrac{n(2n-1)\pi^2}{3(2n+1)^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 + \dfrac{\pi^2}{6}$.

En conclusion, on trouve par encadrement que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2} = \dfrac{\pi^2}{6}}$.

<u>Exercice 11</u> : *(★★ Polynômes de Lagrange)*

Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des réels deux à deux distincts et $b_1, b_2, \ldots, b_n$ des réels pas forcément distincts.
L'objectif de cet exercice est de démontrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que :

$$\forall i \in [\![1, n]\!] \ , \ P(a_i) = b_i$$

P est appelé le polynôme interpolateur de Lagrange.

1) Démontrer ce résultat pour $n = 1$ et $n = 2$.

2) On se place dans le cas général avec n quelconque et on fixe $j \in [\![1, n]\!]$

. **2.a)** Justifier que si P existe alors il est unique.

. **2.b)** Si $b_i = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$, expliciter en fonction des a_i le polynôme interpolateur de Lagrange, qu'on notera L_j

. **2.c)** A l'aide d'une combinaison des polynômes L_j définis ci-dessus, montrer l'existence du polynôme interpolateur de Lagrange dans le cas général.

3) Calculer les polynôme interpolateur de Lagrange vérifiant les conditions suivantes :

. **3.a)** $P(1) = 2$ et $P(3) = 3$

. **3.b)** $P(1) = 2$ et $P(3) = 3$ et $P(-1) = 2$

. **3.c)** $P(1) = 2$ et $P(3) = 3$ et $P(-1) = 2$ et $P(5) = 3$

4) Ensemble des polynômes interpolateurs :

. **4.a)** Si P_0 est le polynôme interpolateur de Lagrange pour les réels $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et $b_1, b_2, \ldots, b_n$, donner une condition nécessaire et suffisante sur $P \in \mathbb{R}[X]$ (de degré quelconque) pour avoir $\forall i \in\in [\![1, n]\!] \ , \ P(a_i) = b_i$.

. **4.b)** Déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(1) = 2$ et $P(3) = 3$ et $P(-1) = 2$

. . . .

Réponses : **1)** Si $n = 1$ alors on veut $P \in \mathbb{R}_0[X]$, c'est donc un polynôme constant. On note $P = \lambda$. On a alors $P(a_1) = b_1 = \lambda$. Donc $\boxed{P = b_1}$ est l'unique solution.

Si $n = 2$ alors on a $P \in \mathbb{R}_1[X]$ donc $P = aX + b$. C'est un polynôme associée à une fonction affine. On souhaite que la fonction passe par les points (a_1, b_1) et (a_2, b_2) avec $a_1 \neq a_2$ donc on calcule le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine comme dans le chapitre de géométrie : $a = \dfrac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2}$ et $b = b_2 2 - a_2 \dfrac{b_1 - b_2}{a_1 - a_2}$.
Donc les coefficients de P sont déterminés de manière unique, ce qui donne l'existence et l'unicité de P.

2) a) Supposons que P et Q soient deux polynômes qui vérifient cela.
On a donc $P, Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ et $\forall i \in [\![1, n]\!] \ , \ P(a_i) = Q(a_i)$, ainsi $\forall i \in [\![1, n]\!] \ , \ (P - Q)(a_i) = 0$ donc a_i est une racine de $P - Q$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Donc $P - Q$ admet n racines deux à deux distinctes.
Or $d°(P - Q) \leq \max(d°P, d°Q) = n - 1$ donc $P - Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$. Si $P - Q$ n'est pas nul, il admet au plus $n - 1$ racines deux à deux distinctes. Par conséquent, la seule possibilité est d'avoir $P - Q = 0$ donc $\boxed{P = Q}$ d'où l'unicité.

. **2.b)** On veut calculer le polynôme $L_j \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ sachant que $\forall i \in [\![1, n]\!] \ , \ L_j(a_i) = 0$ si $i \neq j$ et $L_j(a_j) = 1$. Ainsi cela veut dire que $\forall i \neq j, a_i$ est une racine de L_j. On a donc $n - 1$ racines deux à deux distinctes de L_j, ainsi on peut factoriser L_j par $\prod\limits_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq j}} X - a_i$. Ainsi : $L_j = Q \prod\limits_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq j}} X - a_i$

Où $d°Q = d°L_j - d° \prod\limits_{\substack{1 \leq i \leq n \\ i \neq j}} X - a_i = d°L_j - (n - 1) \leq (n - 1) - (n - 1) \leq 0$

Donc $Q \in \mathbb{R}_0[X]$, on a donc $Q = \lambda \in \mathbb{R}$ et $L_j = \lambda \prod_{\substack{1 \le i \le n \\ i \neq j}} X - a_i$.

Reste à calculer λ, le coefficient domminant de L_j. On remarque, qu'on a pas encore utilisé la propriété que $L_j(a_j) = 1$:

$L_j(a_j) = 1 \iff \lambda \prod_{\substack{1 \le i \le n \\ i \neq j}} a_j - a_i = 1 \iff \lambda = \dfrac{1}{\prod_{i \neq j} a_j - a_i}$. car les a_i étant deux à deux distincts, on a bien $\prod_{i \neq j} a_j - a_i \neq 0$.

Conclusion : $L_j = \dfrac{1}{\prod_{i \neq j} a_j - a_i} \prod_{\substack{1 \le i \le n \\ i \neq j}} X - a_i = \boxed{\prod_{\substack{1 \le i \le n \\ i \neq j}} \dfrac{X - a_i}{a_j - ai}}$

. **2.c)** Si on veut juste avoir $P(a_1) = b_1$, alors il suffit de poser $P = b_1 L_1$. De même si on veut avoir $P(a_2) = b_2$, on peut poser $P = b_2 L_2$... Mais si on veut tout en même temps ?

Si nous faisons une Analyse : On nous donne l'indice qu'il s'agit d'une combinaison des polynômes L_j. Le plus simples serait donc d'avoir $P = \alpha_1 L_1 + \alpha_2 L_2 + \ldots + \alpha_n L_n$. Cela donnerait par exemple $P(a_1) = \alpha_1 L_1(a_1) + \alpha_2 L_2(a_1) + \ldots + \alpha_n L_n(a_1) = \alpha_1 \times 1 + \alpha_2 \times 0 + \ldots + \alpha_n \times 0 = \alpha_1$ donc $\alpha_1 = b_1 = P(a_1)$.

Il semble que le polynôme $P = \sum_{j=1}^{n} b_j L_j$ fonctionne.

Synthèse : Si $P = \sum_{j=1}^{n} b_j L_j$, on a bien $d^\circ P \le \max d^\circ L_j = n - 1$ donc $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, c'est la première condition validée, et ensuite on a :

Si $i \in [\![1, n]\!]$, $P(a_i) = \sum_{j=1}^{n} b_j L_j(a_i) = \sum_{j=1}^{n} b_j \delta_{i,j} = b_i \delta_{i,i} = b_i$ donc $\boxed{\forall i \in [\![1, n]\!] \ , \ P(a_i) = b_i}$ Ainsi P est bien un polynôme interpolateur de Lagrange, d'où l'existence. Pour résumer, on a : $\boxed{P = \sum_{j=1}^{n} b_j \prod_{\substack{1 \le i \le n \\ i \neq j}} \dfrac{X - a_i}{a_j - ai}}$

3) a) On a $a_1 = 1$ et $a_2 = 3$ donc $L_1 = \dfrac{X-3}{1-3} = \dfrac{-1}{2}(X-3)$ et $L_2 = \dfrac{X-1}{3-1} = \dfrac{1}{2}(X-1)$

Ainsi $P = 2 \times L_1 + 3 \times L_2 = -(X-3) + \dfrac{3}{2}(X-1) = \boxed{\dfrac{1}{2}X + \dfrac{3}{2}}$

b) On a $a_1 = 1, a_2 = 3$ et $a_3 = -1$ donc $L_1 = \dfrac{(X-3)(X+1)}{(1-3)(1+1)} = \dfrac{-1}{4}(X^2 - 2X - 3)$,

$L_2 = \dfrac{(X-1)(X+1)}{(3-1)(3+1)} = \dfrac{1}{8}(X^2 - 1)$ et $L_3 = \dfrac{(X-1)(X-3)}{(-1-1)(-1-3)} = \dfrac{1}{8}(X^2 - 4X + 3)$

Ainsi $P = 2 \times L_1 + 3 \times L_2 + 2 \times L_3 = \dfrac{-1}{2}(X^2 - 2X - 3) + \dfrac{3}{8}(X^2 - 1) + \dfrac{1}{4}(X^2 - 4X + 3) = \boxed{\dfrac{1}{8}X^2 + \dfrac{15}{8}}$

c) On a $a_1 = 1, a_2 = 3, a_3 = -1$ et $a_4 = 5$ donc :

$L_1 = \dfrac{(X-3)(X+1)(X-5)}{(1-3)(1+1)(1-5)} = \dfrac{1}{16}(X^2 - 2X - 3)(X - 5) = \dfrac{1}{16}(X^3 - 7X^2 - 7X + 15)$

$L_2 = \dfrac{(X-1)(X+1)(X-5)}{(3-1)(3+1)(3-5)} = \dfrac{-1}{16}(X^2 - 1)(X - 5) = \dfrac{-1}{16}(X^3 - 5X^2 - X + 5)$

$L_3 = \dfrac{(X-1)(X-3)(X-5)}{(-1-1)(-1-3)(-1-5)} = \dfrac{-1}{48}(X^2 - 4X + 3)(X - 5) = \dfrac{-1}{48}(X^3 - 9X^2 + 13X - 15)$

$L_4 = \dfrac{(X-1)(X-3)(X+1)}{(5-1)(5-3)(5+1)} = \dfrac{1}{48}(X^2 - 1)(X - 3) = \dfrac{1}{48}(X^3 + 3X^2 - X + 3)$

Ainsi $P = 2 \times L_1 + 3 \times L_2 + 2 \times L_3 + 3 \times L_4 =$

$= \dfrac{1}{8}(X^3 - 7X^2 - 7X + 15) - \dfrac{3}{16}(X^3 - 5X^2 - X + 5) - \dfrac{1}{24}(X^3 + 3X^2 - X + 3) + \dfrac{1}{16}(X^3 + 3X^2 - X + 3)$

$= \boxed{\dfrac{-1}{24}X^3 + \dfrac{1}{16}X^2 - \dfrac{17}{24}X + 1}$

4) a) Analyse : Soit P un polynôme tel que $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $P(a_i) = b_i$, on a donc $(P - P_0)(a_i) = 0$ pour tout $i \in 1,n$. Donc $P - P_0$ est divisible par $\prod_{j=1}^{n}(X - a_j)$ car les a_j sont deux à deux distincts. Ainsi : $P = P_0 + Q\prod_{j=1}^{n}(X - a_j)$ avec $Q \in \mathbb{R}[X]$

Synthèse : Si $P = P_0 + Q\prod_{j=1}^{n}(X - a_j)$ alors on a bien $\forall i \in [\![1,n]\!]$, $P(a_i) = P_0(a_i) + Q(a_i)\prod_{j=1}^{n}(a_i - a_j) = 0 + Q(a_i) \times 0 = 0$

Ainsi $\boxed{\forall i \in [\![1,n]\!]\ ,\ P(a_i) = b_i \iff P = P_0 + Q\prod_{j=1}^{n}(X - a_j)}$

. **4.b)** D'après la question précédente, c'est l'ensemble : $\boxed{S = \left\{\frac{1}{8}X^2 + \frac{15}{8} + (X-1)(X-3)(X+1)Q \mid Q \in \mathbb{R}[X]\right\}}$

Exercice 12 : *(Division Euclidienne)*

On admet qu'un sous ensemble de $\mathbb{N}$ non vide admet toujours un minimum.
1) Pour $A, B \in \mathbb{R}[X]$, on souhaite montrer qu'il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{R}[X]$ tel que :

$$A = QB + R \text{ et } d°R < B$$

. **1.a)** Si A est factorisable par B, justifier l'existence du couple (Q, R).
. **1.b)** Sinon, justifier qu'il existe un polynôme R tel que $d°R = \min\{d°(A - QB \mid Q \in \mathbb{R}[X]\}$
. **1.c)** En déduire l'existence de Q et R dans le cas général.
. **1.d)** Démontrer l'unicité du couple (Q, R).
2) Calculer Q, R pour les polynômes suivants : **a)** $A = X^2 + 1$ et $B = X^2$
. **2.b)** $A = X^2 + 4X + 4$ et $B = X + 2$
. **2.c)** $A = X^4 + 2X^3 + 3X + 1$ et $B = X^2 + 2X + 1$
. **2.d)** $A = X^n$ et $B = X^2 - 6X + 9$ (on calculera R uniquement)
3) On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ et $P = X^2 - 6X + 9$. Calculer $P(A)$.
4) En déduire l'expression de A^n à l'aide du résultat de la question 2.d).
....

Réponses : **1) a)** A se factorise par $B \iff \exists Q \in \mathbb{R}[X] \mid A = QB$
On a donc bien $A = QB + 0$ avec $R = 0$.

. **1.b)** L'ensemble $E = \{d°(A - QB) \mid Q \in \mathbb{R}[X]\}$ n'est pas vide car il suffit par exemple de choisir $Q = 0$ pour obtenir que $d°A \in E$.
Par ailleurs, comme A ne se factorise pas par Q, on a $\forall Q \in \mathbb{R}[X], A - QB \neq 0$, donc $d°(A - QB) \in \mathbb{N}$. Ainsi $E \subset \mathbb{N}$.
E admet donc un minimum, $n_0 \in E$. Or, comme $n_0 \in \mathbb{E}$, on a $\exists Q_0 \in \mathbb{R}[X] \mid n_0 = d°(A - BQ_0)$. On pose $R_0 = A - BQ_0$, ainsi $A = BQ_0 + R_0$
Reste à démontrer que $d°R_0 < d°B$. Supposons par l'absurde que $d°R_0 \geq d°B$:
Alors $d°\left(R_0 - \frac{c(R_0)}{c(B)}X^{d°R_0 - d°B}B\right) \leq d°R_0 - 1 < d°R_0$. Or en posant $Q_1 = \frac{c(R_0)}{c(B)}X^{d°R_0 - d°B}$, on a :
$R_0 - \frac{c(R_0)}{c(B)}X^{d°R_0 - d°B}B = R_0 - Q_1B = A - Q_0B - Q_1B = A - (Q_1 + Q_0)B$ avec $Q_1 + Q_0 \in \mathbb{R}[X]$
Donc $d°(A - (Q_1 + Q_0)B) \in E$ et $d°(A - (Q_1 + Q_0)B) < d°R_0$ C'est une contradiction car $d°R_0 = \min E$.
Ainsi on a forcément $d°R_0 < d°B$.

. **1.c)** On a donc démontré que le couple $\left(\frac{A}{B}, 0\right)$ fonctionne quand A se factorise par B et sinon, on peut choisir le couple (Q_0, R_0) de la question précédente.

. **1.d)** Si $A = BQ_1 + R_1 = BQ_2 + R_2$ alors $B(Q_1 - Q_2) = R_2 - R_1$. Donc $d°B + d°(Q_1 - Q_2) = d°(R_1 - R_2) \leq \max(d°R_1, d°R_2) < d°B$.
Ainsi $d°B + d°(Q_1 - Q_2) < d°B \implies d°(Q_1 - Q_2) < 0$. La seule possibilité est donc $d°(Q_1 - Q_2) = -\infty$. Donc $Q_1 - Q_2 = 0 \iff \boxed{Q_1 = Q_2}$
On en déduit $R_2 - R_1 = B(Q_1 - Q_2) = 0$ donc $\boxed{R_1 = R_2}$ d'où l'unicité.

2) a) $X^2 + 1 = 1 \times X^2 + 1$ donc $Q = 1$ et $R = 1$.
. **2.b)** $X^2 + 4X = (X + 2)(X + 2)$ donc $Q = X + 2$ et $R = 0$

. **2.c)** $X^4 + 2X^3 + 3X + 1 = (X^2 + 1)(X^2 + 2X + 1) + (5X + 2)$ donc $Q = X^2 + 1$ et $R = 5X + 2$

. **2.d)** On a $X^2 - 6X + 9 = (X - 3)^2$ ainsi on fait une Analyse-Synthèse :
on cherche R tel que $X^n = (X - 3)^2 Q + R$ avec $d°R < d°(X - 3)^2 = 2$. Ainsi $d°R \leq 1$ donc $R = aX + b$.
On a donc $X^n = (X - 3)^2 Q + aX + b$. Pour trouver a et b, on va évaluer les fonctions polynômiales en $X = 3$.
Si $P = X^n$, on a donc $P(3) = 3^n = 0 \times Q(3) + 3a + b \iff \underline{3a + b = 3^n}$
Pour obtenir une autre relation, on remarque que -3 est racine double du polynôme $(X - 3)^2$, cela nous incite à dériver. On a $P' = nX^{n-1} = 2(X - 3)Q + (X - 3)^2 Q' + a$ donc $P'(3) = n3^{n-1} = 0 + 0 + a$.
Ainsi $\underline{a = n3^{n-1}}$. On en déduit $b = 3^n - 3a = 3^n - n3^n = (1 - n)3^n$.
Donc $\boxed{R = n3^{n-1}X + (1 - n)3^n}$
3) On a $P(A) = 0$ en faisant le calcul.

4) D'après la question 2.d) On a $A^n = Q(A)P(A) + R(A) = Q(A) \times 0 + R(A) = R(A)$
Ainsi $A^n = R(A) = n3^{n-1}A + (1-n)3^n I_3 = 3^{n-1}(nA + 3(1-n)I_3) = 3^{n-1}\left(n\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix} + 3(1 - n)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right)$
Donc $\boxed{A^n = 3^{n-1}\begin{pmatrix} 3 - 2n & 2n \\ -2n & 2n + 3 \end{pmatrix}}$
