TD 13 - Suites Réelles

1BCPST 2 Feuille d'exercice Année 2022- 2023

Suites convergentes

Exercice 1 : *(1 minute ♡)* Si elles existent, Calculer les limites des suites de terme général suivant :

1) $(-2)^{2n+1}$ **2)** $\sin(n) - n^2$ **3)** $\tan \frac{1}{n}$ **4)** $\frac{\arctan n}{1+n}$ **5)** $\sum_{k=2}^{n} \ln k$ **6)** $\ln(1+n^2) - \ln n$

7) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ **8)** $(-1)^n + 2$ **9)** $(-1)^n e^{-n}$ **10)** $n^{\frac{1}{10}}$

Exercice 2 : *(Avec comparaison ★ - ★★)* Calculer les limites des suites de terme général suivant :

1) $\lfloor \sqrt{n} \rfloor - n$ **2)** $\frac{3\sin^2(n) + 5n}{\cos^3(n) + 2n}$ **3)** $|\sin(e^n) - e^n|$ **4)** $\frac{\ln n!}{n^2}$ **5)** $\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}} \frac{1}{k}$

Indication : Pour la Q5 on pourra encadrer $\frac{1}{k}$ par l'intégrale de $f(t) = \frac{1}{t}$ en choisissant des bornes adaptées.

Exercice 3 : *(Partie entière et convergence ★)*
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, a-t-on convergence de la suite $(\lfloor u_n \rfloor)_{n\in\mathbb{N}}$? Et réciproquement ?

Exercice 4 : *(Suites stationnaires ★★ - ★★★)* On dit qu'une suite est stationnaire si et seulement si la suite est constante à partir d'un rang $N \in \mathbb{N}$. On a donc pour un telle suite : $\forall n \geq N \ , \ u_n = u_N$.
1) Montrer qu'une suite stationnaire est convergente.
2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ une suite à valeur entières, montrer que $(u_n)_n$ est convergente si et seulement si $(u_n)_n$ est stationnaire.
3) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite périodique de période $T \in \mathbb{N}$ (c'est à dire que $\forall n \in \mathbb{N} \ , \ u_{n+T} = u_n$)
Montrer que $(u_n)_n$ est convergente $\iff$ $(u_n)_n$ est stationnaire $\iff$ $(u_n)_n$ est constante.

Exercice 5 : *(★★ Nombres rationnels et irrationnels)*
1) Montrer que pour tout nombre rationnel $q \in \mathbb{Q}$, il existe une suite de nombre irrationnels $(u_n)_n \in (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})^{\mathbb{N}}$ qui converge vers q.
2) Montrer que pour tout nombre irrationnel $r \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, il existe une suite de nombre rationnels $(q_n)_n \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ qui converge vers r.
Indication : On pourra s'aider de la partie entière. Par exemple pour $r = \pi$, on peut poser $q_0 = 3$, $q_1 = \frac{31}{10}$, $q_2 = \frac{314}{100}$, ..., $q_n =$...
3) Application : Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Montrer qu'il existe un nombre rationnel $q \in \mathbb{Q}$ tel que $q \in]a, b[$.
De même, montrer qu'il existe un nombre irrationnel $r \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ tel que $r \in]a, b[$.
(*Remarque :* On dit que $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ sont <u>denses</u> dans $\mathbb{R}$.)

Exercice 6 : *(Suites adjacentes ★)* Montrer que les suites u_n et v_n définies ci-dessous sont adjacentes et qu'elles convergent :

1) $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n}$. **2)** $u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n^2}$.

Exercice 7 : ★★ On pose $0 < u_0 \leq v_0$ et $(u_n)_n, (v_n)_n$ définies par récurrence par : $\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \end{cases}$

1) Montrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont bien définies et vérifient $\forall n \in \mathbb{N} \ , \ 0 \leq u_n \leq v_n$
2) En déduire que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont deux suites adjacentes et qu'elles convergent.

Croissances comparées/ équivalents

Exercice 8 : *(1 minute ♡)* Calculer les limites des suites de terme général suivant :
1) $2^n - 4^n$ **2)** $\dfrac{n2^n}{n!}$ **3)** $\dfrac{2^n}{(2n)!}$ **4)** $n^9 + n^8 - 2^{\sqrt{n}}$. **5)** $\dfrac{(n^2)!}{n!}$ **6)** $\dfrac{2^{n!}}{8^n}$ **7)** $\sqrt{n!} - \sqrt{n^n}$.
8) $\dfrac{2^{n+1}\sqrt{n!}}{10^n}$ **9)** $(n+2)! - n!$ **10)** $\dfrac{n - n!}{n! + 2n}$ **11)** $\dfrac{n! - (n+1)!}{n}$ **12)** $\dfrac{\sqrt{n!} + 2^n}{n^3 - 2n!}$

Exercice 9 : ★ - ★★ - ★★★ Calculer les limites des suites de terme général suivant :
1) $(n+2)! - n! - e^n$ **2)** $\dfrac{\sin(n) - 2^n}{1 + \cos^2(n)}$ **3)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{e^k}{k^2}$ **4)** $(\lfloor\sqrt{n}\rfloor)! - 2^n$

Exercice 10 : *(1 minute ♡)* Trouver des équivalents simples des suites suivantes :
1) $\dfrac{n^2+2}{n-3}$ **2)** $\dfrac{1}{n} + 1$ **3)** $\dfrac{3^{n+1} - 1}{\frac{1}{n^2} + 3}$ **4)** $\dfrac{(n+1)!}{n}$ **5)** $n + 1 + n^2 - 3\sqrt{n}$ **6)** $\sqrt{n}\dfrac{n^{\frac{3}{2}} - 1}{n+1}$
7) $(n^2+3n+1)^2$ **8)** $\dfrac{\sqrt{n+1}}{n\sqrt{n-1}}$ **9)** $(n+1)(n+2)(n+3)$ **10)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k$ **11)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2$. **12)** $\dfrac{1}{2^n} + \dfrac{1}{n!}$.

Exercice 11 : ★ - ★★ Trouver des équivalents simples des suites de terme général suivant :
1) $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} 2^k$ **2)** $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{1+k}{1-k}$ **3)** $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k!$

Exercice 12 : *(Équivalent de la partie entière ★)* **1)** Montrer que $\lfloor n \rfloor \sim n$.
2) Montrer que si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ alors $\lfloor u_n \rfloor \sim u_n$
3) Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, peut-on trouver un équivalent de $\lfloor u_n \rfloor$ dans le cas général ?
4) Calculer la limite de $\left\lfloor \dfrac{2^n + 1}{\sqrt{4^n - 1}} \right\rfloor$.

Exercice 13 : *(Équivalent et coefficients binômiaux ★★)* Si $k \in \mathbb{N}$, Trouver un équivalent de : $u_n = \dbinom{n}{k}$.

Récurrence avec une fonction

Exercice 14 : ★★ - ★★★ Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de $u_0 \in \mathbb{R}$:
1) $u_{n+1} = u_n e^{u_n}$ **2)** $u_{n+1} = \arctan(u_n)$ **3)** $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n + u_n^2}$ **4)** $u_{n+1} = \cos(u_n)$.

Exercice 15 : ★★ On pose $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$.
1) Vérifier que $(u_n)_n$ est bien définie et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right]$,
2) Si la suite converge, que vaut sa limite ?
3) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - 1| \leq \dfrac{2}{3}|u_n - 1|$
Indication : On pourra utiliser la quantité conjuguée de $u_{n+1} - 1$.
4) Conclure sur la convergence de u_n.