TD 13 - Suites Réelles

1BCPST 2 Feuille d'exercice Année 2022- 2023

Suites convergentes

Exercice 1 : *(1 minute)* Si elles existent, Calculer les limites des suites de terme général suivant :

1) $(-2)^{2n+1}$ **2)** $\sin(n) - n^2$ **3)** $\tan \dfrac{1}{n}$ **4)** $\dfrac{\arctan n}{1+n}$ **5)** $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln k$ **6)** $\ln(1+n^2) - \ln n$

7) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ **8)** $(-1)^n + 2$ **9)** $(-1)^n e^{-n}$ **10)** $n^{\frac{1}{10}}$

. . . .

Réponses : **1)** $(-2)^{2n+1} = -2^{2n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \boxed{+\infty}$

2) $\sin(n) - n^2 = n^2\left(\dfrac{\sin n}{n^2} - 1\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \times (0-1) = \boxed{-\infty}$ **3)** $\tan \dfrac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \tan 0 = \boxed{0}$

4) $0 \leq \dfrac{\arctan n}{1+n} \leq \dfrac{\pi}{2(1+n)}$ donc $\dfrac{\arctan n}{1+n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \boxed{0}$ par encadrement.

5) $\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \ln k = \ln(\prod_{k=2}^{n} k) = \ln(n!) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \boxed{+\infty}$

6) $\ln(1+n^2) - \ln n = \ln\left(\dfrac{1+n^2}{n}\right) = \ln\left(\dfrac{1}{n} + n\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln(+\infty) = \boxed{+\infty}$

7) $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \dfrac{(n+1)-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \boxed{0}$

8) $u_n = (-1)^n + 2$ $\boxed{\text{n'admet pas de limite}}$ car $u_{2n} = 3 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 3$ et $u_{2n+1} = 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1 \neq 3$

9) On a $-e^{-n} \leq (-1)^n e^{-n} \leq e^{-n}$ donc par encadrement $(-1)^n e^{-n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \boxed{0}$

10) $n^{\frac{1}{10}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \boxed{+\infty}$, car c'est une puissance strictement positive.

Exercice 2 : *(Avec comparaison)* Calculer les limites des suites de terme général suivant :

1) $\lfloor \sqrt{n} \rfloor - n$ **2)** $\dfrac{3\sin^2(n) + 5n}{\cos^3(n) + 2n}$ **3)** $|\sin(e^n) - e^n|$ **4)** $\dfrac{\ln n!}{n^2}$ **5)** $\displaystyle\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}} \dfrac{1}{k}$

. . . .

Réponses : **1)** On a $\sqrt{n} - 1 < \lfloor \sqrt{n} \rfloor \leq \sqrt{n} \implies \dfrac{\sqrt{n}-1}{n} < \dfrac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n} \leq \dfrac{\sqrt{n}}{n} \implies \dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{1}{n} < \dfrac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n} \leq \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ Par encadrement donc, on a $\dfrac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

On en déduit $\lfloor \sqrt{n} \rfloor = o(n)$, autrement dit $\lfloor \sqrt{n} \rfloor - n \sim -n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \boxed{-\infty}$.

2) $\dfrac{3\sin^2(n) + 5n}{\cos^3(n) + 2n} = \dfrac{5n}{2n} \cdot \dfrac{3\sin^2(n)/(5n) + 1}{\cos^3(n)/(2n) + 1} = \dfrac{5}{2} \cdot \dfrac{3\sin^2(n)/(5n) + 1}{\cos^3(n)/(2n) + 1}$ Or $\dfrac{\sin^2(n)}{5n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\dfrac{\cos^3(n)}{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car sin et cos sont bornées. On en déduit : $\dfrac{3\sin^2(n) + 5n}{\cos^3(n) + 2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \dfrac{5}{2} \cdot \dfrac{0+1}{0+1} = \boxed{\dfrac{5}{2}}$

3) On a $-1 \leq \sin(e^n) \leq 1$ et comme $n \geq 0$, on a $e^n \geq 1$. Donc $\sin(e^n) - e^n \leq 1 - 1 = 0$ donc $|\sin(e^n) - e^n| = -(\sin(e^n) - e^n) = e^n - \sin e^n$. Par ailleurs $\dfrac{\sin(e^n)}{e^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car sin est bornée. On en déduit $\sin(e^n) = o(e^n)$ et donc $e^n - \sin(e^n) \sim e^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. En conclusion $\boxed{|\sin(e^n) - e^n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}$

4) On a $0 \leq \ln n! = \ln\left(\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k\right) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \ln k \leq \sum_{k=1}^{n} \ln n = n \ln n$ donc $0 \leq \dfrac{\ln n!}{n^2} \leq \dfrac{\ln n}{n}$.

Or par croissances comparées, on a $\dfrac{\ln n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On en déduit donc par encadrement : $\boxed{\dfrac{\ln n!}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$.

5) On pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}} \frac{1}{k}$. On a $\leq \displaystyle\int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ donc :

$$\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}} \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}} \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t} \iff \int_{2^n}^{2^{n+1}+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} \leq u_n \leq \int_{2^n-1}^{2^{n+1}} \frac{\mathrm{d}t}{t}$$

$\iff \ln(2^{n+1}-1) - \ln(2^n) \leq u_n \leq \ln(2^{n+1}) - \ln(2^n - 1)$.

Or $\ln(2^{n+1}-1) - \ln(2^n) = \ln\left(\dfrac{2^{n+1}-1}{2^n}\right) = \ln\left(2 - \dfrac{1}{2^n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln 2$ et

$\ln(2^{n+1}) - \ln(2^n - 1) = \ln\left(\dfrac{2^{n+1}}{2^n-1}\right) = -\ln\left(\dfrac{2^n-1}{2^{n+1}}\right) - \ln\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2^n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\ln\dfrac{1}{2} = \ln 2$

Par encadrement, on en déduit $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ln 2}$.

Exercice 3 : *(Partie entière et convergence)*
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, a-t-on convergence de la suite $(\lfloor u_n \rfloor)_{n\in\mathbb{N}}$?

....

Réponses : Pas forcément, en effet on peut construire un contrexemple avec $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$. On a $\dfrac{-1}{n} \leq u_n \leq \dfrac{1}{n}$ donc par encadrement $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Or on a $1 \leq u_{2n} < 0 \implies \lfloor u_{2n+1} \rfloor = -1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1$ et $0 \leq u_{2n} < 1$ donc $\lfloor u_{2n} \rfloor = 0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Comme les deux suites extraites de $(\lfloor u_n \rfloor)_n$ admettent une limite différente, on en déduit que la suite n'est pas convergente.

Exercice 4 : *(Suites stationnaires)* On dit qu'une suite est stationnaire si et seulement si la suite est constante à partir d'un rang $N \in \mathbb{N}$. On a donc pour un telle suite : $\forall n \geq N\ ,\ u_n = u_N$.
1) Montrer qu'une suite stationnaire est convergente.
2) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ une suite à valeur entières, montrer que $(u_n)_n$ est convergente si et seulement si $(u_n)_n$ est stationnaire.
3) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite périodique de période $T \in \mathbb{N}$ (c'est à dire que $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_{n+T} = u_n$)
Montrer que $(u_n)_n$ est convergente $\iff$ $(u_n)_n$ est stationnaire $\iff$ $(u_n)_n$ est constante.

....

Réponses : **1)** $\boxed{\Longleftarrow]}$ c'est évident, en effet, si la suite est stationnaire alors $\forall n \geq N\ ,\ u_n = u_N$, donc $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} u_N}$.

$\boxed{\Longrightarrow]}$ $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$, donc pour $\varepsilon = \dfrac{1}{4}$, si on écrit la définition de la convergence de u_n, on a :

$\exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N\ ,\ |u_n - \ell| \leq \dfrac{1}{4}$.

On a donc $\forall n \geq N, |u_n - u_N| = |u_n - \ell + \ell - u_N| \leq |u_n - \ell| + |u_N - \ell| \leq \dfrac{1}{2}$ par inégalité triangulaire.

On a donc $u_N - u_n \in \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right]$. Or, $u_n \in \mathbb{Z}$ pour tout n, donc $u_N - u_n \in \mathbb{Z} \cap \left[-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right] = \{0\}$.

Donc $u_N - u_n = 0$. C'est à dire, pour tout $n \geq N$, $u_n = u_N$. donc $\boxed{u_n \text{ est stationnaire}}$.

2) On note $\underbrace{(u_n)_n \text{ est convergente}}_{(1)} \iff \underbrace{(u_n)_n \text{ est stationnaire}}_{(2)} \iff \underbrace{(u_n)_n \text{ est constante.}}_{(3)}$

Le chemin le plus simple pour prouver cela est $(1) \implies (3) \implies (2) \implies (1)$ en effet :

$\boxed{(3) \implies (2)}$ est évident : une suite constante est stationnaire à partir du rang 0

$\boxed{(2) \implies (1)}$ a été démontré aussi à la question 1)

$\boxed{(1) \implies (3)}$ est le plus compliqué. Il faut démontrer que si $(u_n)_n$ est périodique et convergente alors elle est constante. Supposons par l'absurde que ce n'est pas le cas : Si $(u_n)_n$ n'est pas constante alors $\exists n_0, n_1 \mid u_{n_0} \neq u_{n_1}$

On pose $d = |u_{n_0} - u_{n_1}| > 0$ donc en posant $\varepsilon = \dfrac{d}{2}$ comme u_n converge, $\exists N \in \mathbb{N} \mid \forall n \geq N\ ,\ |u_n - \ell| \leq \dfrac{d}{2} \quad (*)$.

Or $\exists k_0 \in \mathbb{N} \mid k_0 T + n_0 \geq N$ (il suffit de prendre $k_0 > \dfrac{N - n_0}{T}$) et de même, il existe $k_1 \in \mathbb{N} \mid k_1 T + n_1 \geq N$.

On prend $k = \max(k_0, k_1)$, on a alors $kT + n_0 \geq k_0 T + n_0 \geq N$ et $kT + n_1 \geq k_1 T + n_1 \geq N$. Par ailleurs comme u_n est $T-$périodique, on a $u_{kT+n_0} = u_{n_0}$ et $u_{kT+n_1} = u_{n_1}$

On en déduit d'après (*) : $|u_{kT+n_0} - u_{kT+n_1}| < \dfrac{d}{2} \iff |u_{n_0} - u_{n_1}| < \dfrac{d}{2} \iff d\dfrac{d}{2} \iff \dfrac{d}{2} < 0 \iff d < 0$

C'est contradictoire car par hypothèse $u_{n_0} \neq u_{n_1} \implies d = |u_{n_0} - u_{n_1}| > 0$.

On en déduit $\forall n_0, n_1 \in \mathbb{N}\ ,\ u_{n_0} = u_{n_1}$ donc $\boxed{(u_n)_n \text{ est constante.}}$

Exercice 5 : *(Nombres rationnels et irrationnels)*

1) Montrer que pour tout nombre rationnel $q \in \mathbb{Q}$, il existe une suite de nombre irrationnels $(u_n)_n \in (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})^{\mathbb{N}}$ qui converge vers q.

2) Montrer que pour tout nombre irrationnel $r \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, il existe une suite de nombre rationnels $(q_n)_n \in \mathbb{Q}^{\mathbb{N}}$ qui converge vers r.

Indication : On pourra s'aider de la partie entière. Par exemple pour r=π, on peut poser $q_0 = 3$,$q_1 = \dfrac{31}{10}$, $q_2 = \dfrac{314}{100}$, ..., $q_n =$...

3) Application : Soit $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. Montrer qu'il existe un nombre rationnel $q \in \mathbb{Q}$ tel que $q \in]a, b[$. De même, montrer qu'il existe un nombre irrationnel $r \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ tel que $r \in]a, b[$.

. . . .

Réponses : **1)** Si $q \in \mathbb{Q}$, on pose $\boxed{u_n = q + \dfrac{\sqrt{2}}{n}}$. On a alors bien $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} q$ et $u_n \notin \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ car par l'absurde, si on avait $u_n \in \mathbb{Q}$, alors on aurait $\sqrt{2} = n(u_n - q) \in \mathbb{Q}$ ce qui est faux. On a donc bien $\boxed{(u_n)_n \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}^{\mathbb{N}} \text{ qui converge vers } q}$.

2) Si $r \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$, on pose $\boxed{u_n = \dfrac{\lfloor 10^n \cdot r \rfloor}{10^n} \in \mathbb{Q}}$. D'après l'exercice 13 question 2), on a $u_n \simeq \dfrac{10^n r}{10^n} = r$ donc $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} r$

3) On prend $a, b \in \mathbb{R}$. On sait que $m = \dfrac{a+b}{2} \in]a, b[$ car c'est le milieu de a, b. On a soit $m \in \mathbb{Q}$, soit $m \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. On fait une disjonction de cas :

<u>Si $m \in \mathbb{Q}$</u>, alors il existe un nombre rationnel dans $]a, b[$. Reste à montrer qu'il existe aussi un nombre irrationnel. D'après la question 1), on a l'existence d'une suite $(u_n)_n \in (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q})^{\mathbb{N}}$ telle que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} m$. On en déduit, $u_n - a \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} m - a > 0$ donc à partir d'un certain rang N_1, la suite $(u_n - a)_n$ est du même signe que $m - a$, c'est à dire : $\forall n \geq N_1\ ,\ u_n - a > 0 \iff u_n > a$.

De même $u_n - b \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} m - b < 0$ donc à partir d'un certain rang N_2 on a $\forall n \geq N_2, u_n - b < 0 \iff u_n < b$.

En conclusion, si on prend $N = \max(N_1, N_2)$, on a alors $a < u_N < b$ donc $u_N \in]a, b[$ et $u_N \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. $\boxed{u_N \text{ est donc un nombre irrationnel contenu dans }]a, b[}$

<u>Si $m \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$</u>, c'est exactement le même raisonnement. La seule différence est que la suite (u_n) sera cette fois <u>une suite de</u> nombres rationnels.

Exercice 6 : *(Suites adjacentes)* Montrer que les suites u_n et v_n définies ci-dessous sont adjacentes et qu'elles convergent :

1) $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$. **2)** $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^3}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n^2}$.

. . . .

Réponses : **1)** $u_{n+1}-u_n=\dfrac{1}{(n+1)^2}\geq 0$ donc $(u_n)_n$ est croissante.
$v_{n+1}-v_n=u_{n+1}-u_n+\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n}=\dfrac{1}{(n+1)^2}-\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{-1}{n(n+1)^2}\leq 0$ donc $(v_n)_n$ est décroissante.
On a $v_n-u_n=\dfrac{1}{n}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ Finalement on a $v_n-u_n=\dfrac{1}{n}\leq 0$ donc $v_n\geq u_n$.
u_n et v_n sont donc adjacentes.
2) $u_{n+1}-u_n=\dfrac{1}{(n+1)^3}\geq 0$ donc $(u_n)_n$ est croissante.
$v_{n+1}-v_n=u_{n+1}-u_n+\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{(n+1)^2}=\dfrac{1}{(n+1)^3}-\dfrac{2n+1}{n^2(n+1)^2}=-\dfrac{n^2+3n+1}{n^2(n+1)^3}\leq 0$ à partir d'un certain rang car $n^2+3n+1\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$. donc $(v_n)_n$ est décroissante à partir d'un certain rang.
On a $v_n-u_n=\dfrac{1}{n^2}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ Finalement on a $v_n-u_n=\dfrac{1}{n^2}\leq 0$ donc $v_n\geq u_n$.
u_n et v_n sont donc adjacentes (à partir d'un certain rang).

<u>Exercice 7</u> : On pose $0<u_0\leq v_0$ et $(u_n)_n,(v_n)_n$ définies par récurrence par : $\begin{cases} u_{n+1}=\sqrt{u_nv_n}\\ v_{n+1}=\dfrac{u_n+v_n}{2}\end{cases}$

1) Montrer que les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont bien définies et vérifient $\forall n\in\mathbb{N}$, $0\leq u_n\leq v_n$
2) En déduire que $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ sont deux suites adjacentes et qu'elles convergent.

. . . .

Réponses : **1)** Par récurrence. <u>Initialisation</u> : Pour $n=0$ c'est vrai car $0<u_0<v_0$
<u>Hérédité :</u> Si c'est vrai au rang n alors :
Comme $u_n>0$ et $v_n>0$ alors u_{n+1} est bien défini. Par ailleurs : On a $2(v_{n+1}-u_{n+1})=u_n+v_n-2\sqrt{u_nv_n}=(\sqrt{u_n}-\sqrt{v_n})^2\geq 0$ donc $v_{n+1}\geq u_{n+1}$. C'est donc vrai au rang $n+1$.

2) On a $u_{n+1}=\sqrt{u_nv_n}\geq\sqrt{u_n^2}=|u_n|=u_n$ donc $(u_n)_n$ est croissante.
On a $v_{n+1}=\dfrac{u_n+v_n}{2}\leq\dfrac{v_n+v_n}{2}=v_n$ donc $(u_n)_n$ est décroissante.
7 D'après la question précédente on a aussi $u_n\leq v_n$.

Enfin, $v_{n+1}-u_{n+1}=\dfrac{1}{2}(\sqrt{u_n}-\sqrt{v_n})^2$ $(*)$. On veut montrer que ça tend vers 0. On a u_n croissante majorée par v_0 donc convergente vers ℓ et v_n décroissante minorée par u_0 donc converge vers ℓ'.
On passe à la limite dans $(*)$, on trouve :
$\ell'-\ell=\dfrac{1}{2}(\sqrt{\ell}-\sqrt{\ell'})^2\iff\sqrt{\ell'}^2-\sqrt{\ell}^2=\dfrac{1}{2}(\sqrt{\ell}-\sqrt{\ell'})^2\iff\sqrt{\ell'}+\sqrt{\ell}=\dfrac{1}{2}(\sqrt{\ell}-\sqrt{\ell'})\iff 3\sqrt{\ell'}=-\sqrt{\ell}$
la seule possibilité est donc $\ell=\ell'=0$ ou $\sqrt{\ell'}-\sqrt{\ell}=0\iff\ell=\ell'$. Finalement dans tous les cas on trouve que u_n et v_n convergent vers la même limite ℓ ainsi on a bien $v_{n+1}-u_{n+1}=\dfrac{1}{2}(\sqrt{u_n}-\sqrt{v_n})^2\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ et les suites sont adjacentes.

Croissances comparées/ équivalents

<u>Exercice 8</u> : *(1 minute)* Calculer les limites des suites de terme général suivant :
1) 2^n-4^n **2)** $\dfrac{n2^n}{n!}$ **3)** $\dfrac{2^n}{(2n)!}$ **4)** $n^9+n^8-2^{\sqrt{n}}$. **5)** $\dfrac{(n^2)!}{n!}$ **6)** $\dfrac{2^{n!}}{8^n}$ **7)** $\sqrt{n!}-\sqrt{n^n}$.
8) $\dfrac{2^{n+1}\sqrt{n!}}{10^n}$ **9)** $(n+2)!-n!$ **10)** $\dfrac{n-n!}{n!+2n}$ **11)** $\dfrac{n!-(n+1)!}{n}$ **12)** $\dfrac{\sqrt{n!}+2^n}{n^3-2n!}$

. . . .

Réponses : **1)** $2^n-4^n\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}-\infty$ **2)** $\dfrac{n2^n}{n!}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$ **3)** $\dfrac{2^n}{(2n)!}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0$

4) $n^9+n^8-2^{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$. **5)** $\dfrac{(n^2)!}{n!} \geq (n+1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $\dfrac{(n^2)!}{n!} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

6) $\dfrac{2^{n!}}{8^n} = 2^{n!-3n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ **7)** $\sqrt{n!}-\sqrt{n^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

8) $\dfrac{2^{n+1}\sqrt{n!}}{10^n} = 2\sqrt{\dfrac{n!}{5^{2n}}} = 2\sqrt{\dfrac{n!}{25^n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

9) $(n+2)!-n! = n!((n+2)(n+1)-1) = n!(n^2+3n+1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$

10) $\dfrac{n-n!}{n!+2n} \sim \dfrac{-n!}{n!} = -1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -1$ **11)** $\dfrac{n!-(n+1)!}{n} = \dfrac{n!(1-(n+1))}{n} = -n! \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$

12) $\dfrac{\sqrt{n!}+2^n}{n^3-2n!} \sim -\dfrac{\sqrt{n!}}{2n!} = -\dfrac{1}{2\sqrt{n!}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

<u>Exercice 9</u> : Calculer les limites des suites de terme général suivant :

1) $(n+2)!-n!-e^n$ **2)** $\dfrac{\sin(n)-2^n}{1+\cos^2(n)}$ **3)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{e^k}{k^2}$ **4)** $(\lfloor\sqrt{n}\rfloor)!-2^n$

. . . .

Réponses : **1)** $(n+2)!-n!-e^n = n!(n^2+3n+1)-e^n = n^2\cdot n!+3n\cdot n!+n!-e^n \sim n^2\cdot n! \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \boxed{+\infty}$

2) $\cos^2(n)\geq 0 \implies 1+\cos^2(n)\geq 1$. Donc $\dfrac{\sin(n)-2^n}{1+\cos^2(n)} \leq \dfrac{\sin(n)-2^n}{1} = \sin(n)-2^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$

3) On a $\dfrac{e^n}{n^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ par croissances comparées. Or $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{e^k}{k^2} \geq \frac{e^n}{n^2}$. Par encadrement, on a donc $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{e^k}{k^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}$.

4) On a si $u_N = \dfrac{2^{N^2}}{N!}$ alors $\dfrac{u_{N+1}}{u_N} = \dfrac{2^{(N+1)^2}N!}{2^{N^2}(N+1)!} = \dfrac{2^{2N+1}}{N+1} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. On a donc à partir d'un certain rang : $\exists N_0 \mid \forall N\geq N_0, \dfrac{u_{N+1}}{u_N}\geq 2$. Ainsi $\forall N\geq N_0\ ,\ u_{N+1}\geq 2u_N$.

Par récurrence immédiate, on a donc $\forall N\geq N_0\ ,\ u_N \geq 2^{N-N_0}u_{N_0} \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Ainsi $u_N \underset{N\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et donc $N! = o(2^{N^2})$. Pour $N=\lfloor\sqrt{n}\rfloor$, on a donc $\lfloor\sqrt{n}\rfloor! = o(2^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor^2})$

Or $\lfloor\sqrt{n}\rfloor \leq \sqrt{n} \implies \lfloor\sqrt{n}\rfloor^2 \leq n \implies 2^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor^2} \leq 2^n \implies 2^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor^2} = O(2^n)$

Donc $\lfloor\sqrt{n}\rfloor = o(2^n)$. Ainsi $(\lfloor\sqrt{n}\rfloor)!-2^n \sim -2^n$. Donc $\boxed{(\lfloor\sqrt{n}\rfloor)!-2^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty}$

<u>Exercice 10</u> : *(1 minute)* Trouver des équivalents simples des suites suivantes :

1) $\dfrac{n^2+2}{n-3}$ **2)** $\dfrac{1}{n}+1$ **3)** $\dfrac{3^{n+1}-1}{\frac{1}{n^2}+3}$ **4)** $\dfrac{(n+1)!}{n}$ **5)** $n+1+n^2-3\sqrt{n}$ **6)** $\sqrt{n}\dfrac{n^{\frac{3}{2}}-1}{n+1}$

7) $(n^2+3n+1)^2$ **8)** $\dfrac{\sqrt{n+1}}{n\sqrt{n-1}}$ **9)** $(n+1)(n+2)(n+3)$ **10)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k$ **11)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k^2$. **12)** $\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{n!}$.

. . . .

Réponses : **1)** $\dfrac{n^2+2}{n-3}\sim n$ **2)** $\dfrac{1}{n}+1\sim 1$ **3)** $\dfrac{3^{n+1}-1}{\frac{1}{n^2}+3}\sim 3^n$ **4)** $\dfrac{(n+1)!}{n}\sim n!$

5) $n+1+n^2-3\sqrt{n}\sim n^2$ **6)** $\sqrt{n}\dfrac{n^{\frac{3}{2}}-1}{n+1}\sim n$ **7)** $(n^2+3n+1)^2\sim n^4$ **8)** $\dfrac{\sqrt{n+1}}{n\sqrt{n-1}}\sim\dfrac{1}{n}$

9) $(n+1)(n+2)(n+3)\sim n^3$ **10)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k\sim\frac{n^2}{2}$ **11)** $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}k^2\sim\frac{n^3}{3}$ **12)** $\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{n!}\sim\dfrac{1}{2^n}$.

<u>Exercice 11</u> : Trouver des équivalents simples des suites de terme général suivant :

1) $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n}2^k$ **2)** $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}\frac{1+k}{1-k}$ **3)** $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}k!$

. . . .

Réponses : **1)** $u_n = \sum_{k=n}^{2n} 2^k = \sum_{k=0}^{2n} 2^k - \sum_{k=0}^{n} 2^k$ Or $\sum_{k=0}^{n} 2^k = \frac{1-2^{n+1}}{1-2} \sim 2^{n+1}$
et donc $\sum_{k=0}^{2n} 2^k \sim 2^{2n+1}$. Ce terme domine car on a $2^{n+1} = o(2^{2n+1})$, On en déduit : $\boxed{u_n \sim 2^{2n+1}}$.

2) $u_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{1+k}{1-k} = \frac{(n+1)!}{2} \cdot \frac{(-1)^n}{(n-1)!} = \frac{(-1)^n(n+1)n}{2} \sim \boxed{\frac{(-1)^n n^2}{2}}$

3) $u_n = \sum_{k=0}^{n} k! = n! + \sum_{k=0}^{n-1} k!$. Le terme $n!$ a l'air dominant, on va le prouver.
On a $\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n-1} k! = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k!}{n!}$ avec $\frac{k!}{n!} = \frac{1}{n(n-1)(n-2)\dots(k+1)} \leq \frac{1}{n(n-1)}$ si $k < n-1$. Donc :
$\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n-1} k! = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{k!}{n!} = \frac{1}{n} + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{k!}{n!} \leq \frac{1}{n} + \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n} + \frac{n-1}{n(n-1)} = \frac{2}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. En conclusion on a bien
$\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n-1} k! \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\sum_{k=0}^{n-1} k! = o(n!)$ donc $\boxed{u_n \sim n!}$

Exercice 12 : *(Équivalent de la partie entière)* **1)** Montrer que $\lfloor n \rfloor \sim n$.
2) Montrer que si $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ alors $\lfloor u_n \rfloor \sim u_n$
3) Si $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \ell$, peut-on trouver un équivalent de $\lfloor u_n \rfloor$ dans le cas général ?
4) Calculer la limite de $\left\lfloor \frac{2^n+1}{\sqrt{4^n-1}} \right\rfloor$.
. . . .

Réponses : **1)** On a $n-1 < \lfloor n \rfloor \leq n \iff 1 - \frac{1}{n} < \frac{\lfloor n \rfloor}{n} \leq 1$.
Par encadrement, on a $\frac{\lfloor n \rfloor}{n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ donc $\boxed{\lfloor n \rfloor \sim n}$.

2) On raisonne exactement pareil, à partir d'un certain rang N, on a $\forall n \geq N$, $u_n > 0$. Donc $u_n - 1 < \lfloor u_n \rfloor \leq u_n \iff 1 - \frac{1}{u_n} < \frac{\lfloor u_n \rfloor}{u_n} \leq 1$. Par encadrement, on a $\frac{\lfloor u_n \rfloor}{u_n} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ donc $\boxed{\lfloor u_n \rfloor \sim u_n}$.
3) Non. Par exemple si $u_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ alors on a $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1$ mais on a $\lfloor u_n \rfloor = 1 + (-1)^n$ et on n'a pas d'équivalent plus simple.
Par ailleurs si $u_n = 2$ on a $\lfloor u_n \rfloor = 2 \sim 2 = \lfloor \ell \rfloor$.
4) On a $\frac{2^n+1}{\sqrt{4^n-1}} \sim 1$. Par ailleurs $\frac{2^n+1}{\sqrt{4^n-1}} = \frac{2^n+1}{\sqrt{(2^n+1)(2^n-1)}} = \sqrt{\frac{2^n+1}{2^n-1}} \geq 1$.
On en déduit qu'il existe un rang $N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N$, $, 0 \leq u_n - 1 \leq \frac{1}{2}$. Donc $1 \leq u_n \leq \frac{3}{2}$
donc $\forall n \geq N, \lfloor u_n \rfloor = 1$.
On en déduit $\boxed{\left\lfloor \frac{2^n+1}{\sqrt{4^n-1}} \right\rfloor \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1}$

Exercice 13 : *(Équivalent et coefficients binômiaux)* Si $k \in \mathbb{N}$, Trouver un équivalent de : $u_n = \binom{n}{k}$.
. . . .

Réponses : On a $u_n = \frac{n!}{k!((n-k)!}$. Or $n! = \prod_{i=1}^{n} i = \prod_{i=n-k+1}^{n} i(n-k)!$. Donc $u_n = \frac{1}{k!}\prod_{i=n-k+1}^{n} i$.

On montre que $\displaystyle\prod_{i=n-k+1}^{n} i = \underbrace{n(n-1)....(n-k+1)}_{k \text{ termes}} \sim n^k$.

On pose $j = i - n + k$: $\displaystyle\prod_{j=1}^{k}(j-k+n)$. $\forall j \in [\![1,k]\!]$, on a fixé j et k et on a donc $j - k + n \sim n$. Comme l'équivalent est compatible avec le produit et qu'on a un produit de k termes (k est constant : ne dépend pas de n). on a donc $\displaystyle\prod_{j=1}^{k}(j-k+n) \sim \prod_{j=1}^{k} n = n^k$

Finalement $\boxed{u_n \sim \dfrac{n^k}{k!}}$.

Récurrence avec une fonction

Exercice 14 : Etudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fonction de $u_0 \in \mathbb{R}$:
1) $u_{n+1} = u_n e^{u_n}$ **2)** $u_{n+1} = \arctan(u_n)$ **3)** $u_{n+1} = \cos(u_n)$. **4)** $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n + u_n^2}$

....

Réponses : **1)** On pose $f(x) = xe^x$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$, et $f'(x) = (x+1)e^x$. Donc $f'(x) \geq 0 \iff x \geq -1$.
Par ailleurs, $f(x) - x > 0 \iff x(e^x - 1) \geq 0 \iff (x > 0 \text{ et } e^x \geq 1)$ ou $(x < 0 \text{ et } e^x \leq 1)$
C'est donc toujours vrai. On a donc :

x	$-\infty$		-1	0	$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$ 0 $\nearrow$	$+\infty$
$f(x) - x$	0	$+$	$+$	0	$+$

$\boxed{u_0 \in]0,+\infty[\ :}$ alors comme $f(]0,+\infty[) =]0,+\infty[$, on a $u_n \in]0,+\infty[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (récurrence immédiate). Par ailleurs, on a $f(u_n) - u_n \geq 0$ donc (u_n) est croissante.
Soit elle converge vers $\ell \in \mathbb{R}$, soit elle diverge vers $+\infty$.
Si elle converge vers ℓ alors $\ell e^\ell = \ell$ donc $\ell = 0$ est la seule possibilité par continuité de f.
C'est impossible car par croissance de la suite, on a $u_n \geq u_0 > 0 \implies \ell \geq u_0 > 0$ par passage à la limite.
Donc $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}$.

$\boxed{u_0 \in [-1,0] \ :}$ On a $f([-1,0]) \subset]-e^{-1},0] \subset]-1,0]$. On a donc $u_n \in]-1,0[$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Par ailleurs, $(u_n)_n$ est croissante est bornée. On en déduit : $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R}$. La limite ℓ étant un point fixe de f, on trouve $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$.

$\boxed{u_0 \in]-\infty,-1[\ :}$ Alors $f(]-\infty,-1[) \subset]-e^{-1},0[\subset]-1,0[$. Donc $u_1 \in]-1,0[$. On se ramène donc au cas précédent et on trouve $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$.

2) $u_{n+1} = \arctan(u_n)$. On peut faire directement le tableau de $f = \arctan$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$\frac{-\pi}{2}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$
$f(x)-x$	$+$		0		$-$

$\boxed{u_0 \in \mathbb{R}_+ :}$ Alors $f(\mathbb{R}_+) \subset \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\subset \mathbb{R}_+$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{R}_+$.
On a par ailleurs, u_n décroissante donc $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$.

$\boxed{u_0 \in \mathbb{R}_- :}$ Alors $f(\mathbb{R}_-) \subset \left]\frac{-\pi}{2}, 0\right] \subset \mathbb{R}_-$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \mathbb{R}_-$.
On a par ailleurs, u_n croissante donc $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0}$.

3) $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n + u_n^2}$. On pose $f(x) = \sqrt{1 + x + x^2}$ et on remarque que $D_f = \mathbb{R}$ en faisant le calcul du $\Delta = -3$. On a par ailleurs, $f(x) - x \geq 0 \iff \sqrt{1 + x + x^2} \geq x$ ce qui est toujours vrai : en effet c'est évident quand $x \leq 0$ et si $x \geq 0$ alors $\sqrt{1 + x + x^2} \geq x \iff 1 + x + x^2 \geq x^2 \iff 1 + x \geq 0$ ce qui est vrai car $x \geq 0$.

On n'a donc même pas besoin d'étudier les variations de f, on a $\forall n \in \mathbb{N}\ u_{n+1} \geq u_n$. La suite $(u_n)_n$ est donc croissante. Par monotonie, soit elle admet une limite finie ℓ, soit elle diverge vers $+\infty$. Or, l'équation $f(\ell) = \ell$ n'admet pas de solution. On en déduit que $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}$

4) $u_{n+1} = \cos(u_n)$. Dans tous les cas on a $u_1 = \cos(u_0) \in [-1, 1]$, donc faisons déjà l'étude sur u_1, ce qui permettra de réduire l'intervalle d'étude à $[-1, 1]$.
On pose $g(x) = \cos(x) - x$. On a $g'(x) = -\sin x - 1 \leq 0$ donc g est décroissante. Par ailleurs, $g(0) > 0$ et $g(1) < 0$. On en déduit par le théorème des valeurs intermédiaires que g s'annule en $\alpha \in]0, 1[$.

On peut faire directement le tableau de variation :

x	-1		0		α		1
$f(x)$	$\cos(1)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	α	$\searrow$	$\cos(1)$
$f(x)-x$	$+$		$+$		0		$-$

$\boxed{u_1 \in [\alpha, 1] :}$ Alors $f([\alpha, 1]) \subset [\alpha, \cos(1)] \subset [\alpha, 1]$ donc pour tout $n \geq 1$, $u_n \in [\alpha, 1]$.
On a par ailleurs, u_n décroissante donc $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha}$.

$\boxed{u_1 \in [\cos(1), \alpha] :}$ Alors $f([\cos(1), \alpha[) \subset [\alpha, f(\cos(1))[\subset [\alpha, 1[$ car $f(\cos(1)) \geq f(\alpha) = \alpha$ la fonction f étant décroissante sur $[0, 1]$. Donc $u_2 \in [\alpha, 1]$ et on se ramène au cas précédent pour obtenir : $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha}$.

$\boxed{u_1 \in [-1, \alpha] :}$ Alors $f([-1, \alpha]) \subset [\cos(1), 1]$. Si $u_2 \in [\alpha, 1]$, alors on se ramène au premier cas.
Si $u_2 \in [\cos(1), \alpha[$, alors on se ramène au deuxième cas.
Dans tous les cas $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha}$.

On en déduit $\boxed{\forall u_0 \in \mathbb{R}\ ,\ u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha}$.

Exercice 15 : On pose $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N} u_{n+1} = \sqrt{2 - u_n}$.

1) Vérifier que $(u_n)_n$ est bien définie et $\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ u_n \in \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]$,

2) Si la suite converge, que vaut sa limite ?

3) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_{n+1} - 1| \leq \dfrac{2}{3}|u_n - 1|$
4) Conclure sur la convergence de u_n.

....

Réponses : **1)** On montre cela par récurrence. <u>Initialisation :</u> On a bien $u_0 \in \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right]$
<u>Hérédité :</u> Si c'est vrai au rang n alors on a :
$\dfrac{-3}{2} \leq -u_n \leq \dfrac{-1}{2} \iff \dfrac{1}{2} \leq 2 - u_n \leq \dfrac{3}{2} \iff \sqrt{\dfrac{1}{2}} \leq \sqrt{2-u_n} \leq \sqrt{\dfrac{3}{2}} \implies u_{n+1} \in \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}\right]$
car $\dfrac{1}{2} \leq 1 \implies \sqrt{\dfrac{1}{2}} \geq \dfrac{1}{2}$ et $\dfrac{2}{3} \geq 1 \implies \sqrt{\dfrac{2}{3}} \leq \dfrac{2}{3}$
C'est donc vrai au rang $n+1$.
u_{n+1} est bien défini à condition que $u_n \leq 2$, ce qui est bien le cas, car d'après la récurrence, $u_n \leq \dfrac{3}{2}$.
2) On a $\ell \geq 0$ et $\ell = \sqrt{2-\ell} \iff \ell^2 = 2 - \ell \iff \ell^2 + \ell - 2 = 0$. On a $\Delta = 9$ et $x_1 = \dfrac{-1+3}{2} = 1 > 0$ ou $x_2 = \dfrac{-1-3}{2} = -2 < 0$. Comme ℓ est positive, on en déduit $\boxed{\ell = 1}$
3) On a $|u_{n+1} - 1| = |\sqrt{2-u_n} - 1| = \left|\dfrac{2 - u_n - 1}{\sqrt{2-u_n}+1}\right| = \dfrac{|1-u_n|}{u_{n+1}+1} \leq \dfrac{2}{3}|1-u_n|$
Car $u_{n+1} + 1 \geq \dfrac{1}{2} + 1 = \dfrac{3}{2} \geq 0$ donc par décroissance de l'inverse sur $\mathbb{R}_+$, on a $\dfrac{1}{u_{n+1}+1} \leq \dfrac{2}{3}$
4) On pose $v_n = |u_n - 1|$. Par récurrence immédiate, on a $v_n \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^n v_0 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
On en déduit $|u_n - 1| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Cela est équivalent à dire que $\boxed{u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1}$.
